

Основні поняття та означення теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Принцип суперпозиції для лінійних диференціальних рівнянь та приклади його застосування.

Основні поняття:

x, y – незалежні змінні. Візьмемо функцію $U(x, y)$, вважаємо, що вона є гладкою (має похідні).

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = U_{xy}$$

Означення. Рівнянням, яке залежить від незалежних змінних x, y функції $U(x, y)$ та похідних цієї функції U_x, U_y і т.д. до m -го порядку включно, називається **рівнянням в частинних похідних m -го порядку**.

$$F(x, y, U, U_x, U_y, \dots, U^{(m)}) = 0 \quad (1)$$

Функція $U(x, y)$, яка при підстановці в рівняння (1) обертає його в тотожність називається **розв'язком**.

Приклад. x – незалежна змінна

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= f(x), U = U(x, C_1, \dots, C_n) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= 0, U = f(x) + g(y) \end{aligned} \rightarrow \text{Розв'язок } n \text{ констант залежить від } n \text{ функцій}$$

↑ Рівняння Д'Аламбера

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 - \text{хвильове рівняння} \rightsquigarrow \text{описує рівняння руху хвиль}$$

$$\text{Введемо змінні } \xi = x + ct; \eta = x - ct \rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$$

$$U = f(\xi) + g(\eta) = f(x + ct) + g(x - ct) - \text{довільний розв'язок}$$

$$\text{Розглянемо } \frac{\partial^n U}{\partial x^n} = f(x), u(0) = C_0, U_x(0) = C_1, \dots, U_x^{(n-1)}(0) = C_n. \text{ Це називається}$$

задача Коші.

Візьмемо хвильове рівняння :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f(x, t), -\infty < x < +\infty, t > 0, c - \text{швидкість}$$

$f(x, t)$ – джерело хвиль

До рівнянь додаються 2 додаткові умови:

$$U(x, 0) = U_0(x), U_t(x, 0) = U_1(x)$$

Рівняння в частинних похідних з початковими умовами, що дозволяють отримати єдиний розв'язок, називається **задачею**.

Теорема 1. Принцип суперпозиції

$LU(x, y) = 0$ – однорідне лінійне рівняння

$LU(x, y) = f(x, y)$ – неоднорідне лінійне рівняння

$$1) \quad \text{Якщо } LU_1, \dots, LU_n = 0 \rightarrow L(\sum_{i=1}^n \alpha_i U_i) = 0$$

$$2) \quad LU = 0, LV = f \rightarrow L(U + V) = f$$

Сума розв'язків однорідного і неоднорідного є розв'язком неоднорідного.

$$3) \quad \text{Якщо } LU_1 = f_1, \dots, LU_n = f_n \rightarrow L(\sum_{i=1}^n \alpha_i U_i) = \sum_{i=1}^n f_i$$

◀ Доведення впливає підстановкою

$$LU_1 + \dots + LU_n = L(U_1 + \dots + U_n)$$

Метод відокремлення змінних для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними та приклади його застосування.

Розглянемо регулярну крайову задачу на відрізьку:

$$\begin{aligned} \rho M u &= a^2 L u + F, & x_1 < x < x_2, & t > 0, \\ \alpha_1 u(x_1, t) - \beta_1 u_x(x_1, t) &= \chi_1(t), & t > 0, \\ \alpha_2 u(x_2, t) + \beta_2 u_x(x_2, t) &= \chi_2(t), & t > 0, \\ \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0) &= \varphi_k(x), & k = \overline{0, m-1}, & x_1 < x < x_2, \end{aligned}$$

де $M = \sum_{i=0}^m b_{m-i} \frac{\partial^i}{\partial t^i}$. ($b_0, \dots, b_m$ – неперервні функції від t , перша з яких додатна)

$L = \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial}{\partial x} \right) - q$, (ρ, α_i, β_i , (а також p і q у виразі оператора L) такі, як у регулярній задачі ШЛ);

F – неперервна функція від x і t така, що для будь-якого t

$$\int_{x_1}^{x_2} |F(x, t)| dx < \infty;$$

a^2 – неперервна додатна функція від t ; $\chi_1, \chi_2, \varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}$ – кусково гладкі функції написаних вище змінних.

Суть методу відокремлених змінних полягає у наступному:

1) Знаходимо власні числа λ_n і власні функції X_n ($n=n_0, n_0+1, \dots$) задачі ШЛ:

$$\begin{aligned} (pX')' - qX &= -\lambda \rho X \\ \alpha_1 X(x_1) - \beta_1 X'(x_1) &= 0 \\ \alpha_2 X(x_2) + \beta_2 X'(x_2) &= 0 \end{aligned}$$

2) Записуємо розклади

$$F(x, t) = \rho \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n(t) X_n(x) \quad \text{та} \quad \varphi_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi_{nk} X_n.$$

Коефіцієнти розкладу обчислюються за формулою $\varphi_n = \frac{(\varphi, X_n)}{\|X_n\|^2}$.

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) X_n(x) dx, \\ \varphi_{kn}(t) &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_{x_1}^{x_2} \varphi_k(x) X_n(x) \rho(x) dx, \\ \text{Де } \|X_n\|^2 &= \int_{x_1}^{x_2} X_n(x)^2 \rho(x). \end{aligned}$$

3) Для кожного n розв'язуємо задачу Коші

$$\begin{aligned} M u_n &= -a^2 \lambda_n u_n + f_n \\ u_n^{(k)}(0) &= \varphi_{nk}, \quad k = \overline{0, m-1} \end{aligned}$$

Розглянемо цей метод на прикладі наступної задачі:

Знайти розв'язок рівняння

$$L[u] = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x) u = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (1)$$

Що задовольняє умовам

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, & u(l, t) &= 0, & t &\geq 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x), & 0 &\leq x \leq l. \end{aligned}$$

Тут k , q и ρ неперервні на відрізку $0 \leq x \leq l$ додатні функції ($k > 0$, $\rho > 0$, $q \geq 0$).

Вирішимо цю задачу методом відокремлених змінних. Для відшукування частинних розв'язків звернемося до допоміжної задачі про існування стоячих хвиль.

Знайти нетривіальні розв'язки рівняння (1), що задовольняють граничним умовам

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

І такі, що можна представити у вигляді $u(x, t) = X(x)T(t)$.

Підставляючи розв'язок у рівняння і використовуючи граничні умови, після відокремлення змінних отримуємо:

$$\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dX}{dx} \right] - qX + \lambda \rho X = 0$$

$$T'' + \lambda T = 0$$

Для визначення функції $X(x)$ ми отримаємо наступну крайову задачу на власних значеннях

(При $\rho = \rho_0 = \text{const}$, $k = k_0 = \text{const}$ ми отримуємо крайову задачу про власні коливання струни із закріпленим кінцями:

$$X'' + \mu X = 0 \quad (\mu = \frac{\rho_0}{k_0} \lambda),$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

Знайти ті значення параметра λ , при яких існують нетривіальні розв'язки задачі:

$$L(X) + \lambda \rho X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (2)$$

а також знайти ці розв'язки. Такі значення параметра λ називаються власними значеннями, а відповідні розв'язки – власними функціями задачі (2).

Повернемося тепер до рівняння з частинними похідними. Для функції $T(t)$ ми маємо рівняння $T'' + \lambda_n T = 0$

Без будь-яких додаткових умов. Його розв'язок буде мати вигляд

$T(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t$, де A_n і B_n – невизначені коефіцієнти. Таким чином, допоміжна задача має нескінченну множину розв'язків вигляду

$$u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t)X_n(x)$$

Звернемося до вирішення задачі із заданими початковими умовами. Будемо шукати розв'язок у вигляді:

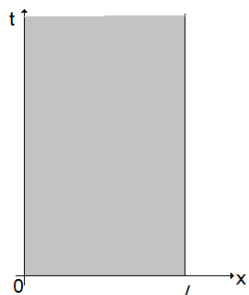
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x)$$

З рівностей $u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x)$ знаходимо, що

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}},$$

Де φ_n і ψ_n – коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ при розкладі по ортогональній з вагою $\rho(x)$ системі функцій $\{X_n(x)\}$.

Розв'язок рівняння дифузії на відрізку методом відокремлення змінних. Приклад.



Нехай x - просторова координата, t - час.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad 0 < x < l; \quad t > 0$$

$a^2 = D$ - коефіцієнт дифузії. Початкові умови: $u(t, 0) = 0$, $u(l, t) = 0$, $u(x, 0) = U_0 x$

Розв'язання

Зведемо р-ня в частинних похідних до лінійного. Шукаємо спец розв'язок, такий, що

$$V(x, t) = X(x)T(t) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow X(x)T'(t) - a^2 T(t)X''(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X(x)T(t)} \Rightarrow \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 = \text{const} \Rightarrow \begin{cases} T'_t + a^2 \lambda^2 T = 0 \\ X''_{xx} + \lambda^2 X = 0 \end{cases}$$

Вважаємо $V(0, t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow \forall t \Rightarrow X(0) = 0, T(0) = 0$

$$\begin{cases} X''_{xx} + \lambda^2 X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \text{ - задача Штурма-Ліувіля.}$$

$$\text{Загальний розв'язок: } X(x) = \begin{cases} A \sin \lambda x + B \cos \lambda x, & \lambda \in R \\ A \sinh \nu x + B \cosh \nu x, & \nu = i\lambda \in R \\ A_0 x + B_0, & \lambda = 0 \end{cases}$$

$$1) \lambda = 0: \quad X(0) = B_0 = 0, \quad X(l) = A_0 l = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

$$2) \nu = i\lambda \in R:$$

$$X(x) = A_1 \sinh \nu x + B_1 \cosh \nu x \quad X(0) = B_1 = 0, \quad X(l) = A_1 \sinh \nu x = 0 \Rightarrow A_1 = 0; \Rightarrow X(x) = 0$$

$$3) \lambda \in R$$

$$X(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x \quad X(0) = B = 0 \quad X(l) = A \sin \lambda x = 0 \Rightarrow \sin \lambda x = 0, \quad A l = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad (1)$$

Покладаємо $A=1$. (Якщо A - з умови нормування, то тоді в формулі (3) відсутній коефіцієнт $2/l$)

$$\text{Отже } X_n(x) = A \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n \in N \quad (2)$$

$$\text{Рівняння} \quad T'_n + a^2 \lambda_n^2 T_n = 0 \Rightarrow \text{розв'язок: } T_n(t) = C_n \exp(-a^2 \lambda_n^2 t)$$

тоді $V_n(x, t) = X_n(x)C_n \exp(-a^2 \lambda_n^2 t)$

$u(x, 0) = U_0 x = \sum_n X_n(x)C_n$, де

$$C_n = \frac{(U_0(x), X_n(x))}{\|X_n\|^2} = \int_0^l U_0(x) X_n dx \frac{1}{\int_0^l X_n^2(x) dx} = \frac{2}{l} \int_0^l U_0(x) X_n dx \quad (3)$$

$$\sum_n X_n(x)C_n \exp(-a^2 \lambda_n^2 t) = u(x, t) \quad (1-3)$$

Якщо задача неоднорідна: $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$, то друге рівняння матиме вигляд

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'_n - F_n}{T_n} = -\lambda_n^2 \quad \Rightarrow \quad T'_n + a^2 \lambda_n^2 T_n = F_n$$

F_n визначається як коеф в розкладі неоднорідності: $f(x, t) = \sum_n F_n(t) X_n(x)$

$$F_n = \frac{(f, X_n)}{\|X_n\|^2} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) X_n(x) dx$$

методом варіації сталої знаходимо розв'язок:

$$T_n(t) = C_n \exp(-a^2 \lambda_n^2 t) + \int_0^t F_n(s) \exp(-a^2 \lambda_n^2 (t-s)) ds$$

Відповідь: $U(x, t) = T_n(t) \times X_n(x)$

Розв'язок хвильового рівняння на відрізку методом відокремлення змінних. Приклад.

Маємо хвильове рівняння $U_{tt} - a^2 U_{xx} = f(x, t)$, $0 < x < l$, $t > 0$

Межові умови: $U(0, t) = 0, U(l, t) = 0$, $t > 0$

Початкові умови: $U(x, 0) = U_0(x), U_t(x, 0) = U_1(x), 0 < x < l$

Розв'язання:

$$U(x, t) = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(x) T_{\lambda}(t)$$

Задовольняємо межові умови:

$$0 = U(0, t) = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(0) T_{\lambda}(t) \Rightarrow X_{\lambda}(0) = 0$$

$$0 = U(l, t) = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(l) T_{\lambda}(t) \Rightarrow X_{\lambda}(l) = 0$$

Задача Штурма-Ліувілля: $\begin{cases} X_{\lambda}'' + \lambda^2 X_{\lambda} = 0, 0 < x < l \\ X_{\lambda}(0) = X_{\lambda}(l) = 0 \end{cases}$

$$X_{\lambda}(x) = A_{\lambda} \cos(\lambda x) + B_{\lambda} \sin(\lambda x), X_{\lambda}(0) = 0 \Rightarrow A_{\lambda} = 0, X_{\lambda}(l) = 0 \Rightarrow B_{\lambda} \sin(\lambda l) = 0$$

B_{λ} не може бути рівне 0 бо буде тривіальний розв'язок. Тоді: $\sin(\lambda l) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\pi}{l} n$, $n \in \mathbb{Z}$, $X_{\lambda} = X_n = B_n \sin(\lambda_n x)$ (1)

Знайдемо константу B_{λ} з умови: $\int_0^l X_n^2 dx = 1 \Rightarrow B_{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{l}}$

Розкладемо $f(x, t) = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(x) Q_{\lambda}(t)$ Функції X_{λ} і X_{μ} — ортогональні. Інтеграл нормування і умова ортогональності: $\int_0^l X_{\lambda}(x) X_{\mu}(x) dx = \delta_{\lambda\mu}$

$$\int_0^l f(x, t) X_{\mu}(x) dx = \sum_{\lambda} Q_{\lambda}(t) \int_0^l X_{\lambda}(x) X_{\mu}(x) dx = \sum_{\lambda} Q_{\lambda}(t) \delta_{\lambda\mu} = Q_{\mu}(t) = \int_0^l f(x, t) X_{\mu}(x) dx$$

Підставимо $U(x, t) = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(x) T_{\lambda}(t)$ в хвильове рівняння:

$$\sum_{\lambda} (X_{\lambda}(x) T_{\lambda}''(t) - a^2 X_{\lambda}''(x) T_{\lambda}(t)) = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(x) Q_{\lambda}(t) \Rightarrow T_{\lambda}'' + a^2 \lambda^2 T_{\lambda} = Q_{\lambda}(t)$$

Загальний розв'язок: $T_{\lambda}(t) = A_{\lambda} \cos(a\lambda t) + B_{\lambda} \sin(a\lambda t) + \int_0^t \frac{\sin(a\lambda(t-s))}{a\lambda} Q_{\lambda}(s) ds$ (2)

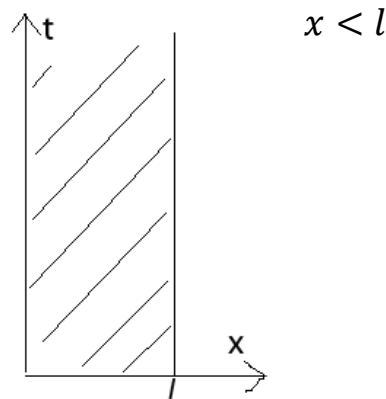
Константи A і B знаходяться з початкових умов: (важливий коментар про те, що нехтуємо інтегралом в правій частині рівності вище, а ігноруємо ним тому, що у нього, з-за того, що умови початкові, межі інтегрування 0-0)

$$U(x, 0) = U_0(x) = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(x) T_{\lambda}(0) = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(x) A_{\lambda}, A_{\lambda} = \int_0^l U_0(x) X_{\lambda}(x) dx$$
 (3)

$$U_t(x, 0) = U_1(x) = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(x) T'_{\lambda}(0) = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(x) a \lambda B_{\lambda}, B_{\lambda} = \int_0^l U_1(x) X_{\lambda}(x) dx$$
 (4)

Відповідь:

$$U(x, t) = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(x) T_{\lambda}(t), \text{ де } X_{\lambda}(x) = (1), T_{\lambda}(t) = (2), (3), (4)$$



Розв'язок рівняння Лапласа та Пуассона в прямокутнику методом відокремлення змінних. Приклад.

Рівняння Лапласа у декартових координатах має вигляд: (Згадаємо про те, що якщо рівняння неоднорідне по обом змінним, то задачу з-за адитивності доцільно розбити на дві!)

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$

межові (граничні) умови : $U(x,0)=f(x)$, $U(x,b)=g(x)$; $U(0,y)=0$, $U(a,y)=0$.

Позначимо шукану функцію (частинний розв'язок) через $v_\lambda(x,y)=X_\lambda(x)Y_\lambda(y)$, вважаємо що вона задовольняє рівняння Лапласа, яке прийме вигляд

$$\Delta v = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

Переписавши його у формі $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$, отримаємо незалежні рівняння для знаходження X і Y (λ -константа відокремлення змінних).

Рівняння $X'' + \lambda^2 X = 0$ має загальний розв'язок

$$X(x) = A_\lambda \sin \lambda x + B_\lambda \cos \lambda x$$

з урахуванням однорідних умов $X(0)=0$, (маємо задачу Штурма – Ліувілля) отримаємо:

$$B_\lambda = 0, \quad X(a) = A_\lambda \sin \lambda a = 0 \Rightarrow \sin \lambda a = 0 \Rightarrow \lambda a = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda_n = \frac{\pi n}{a}, \quad n=1, 2, \dots$$

Визначаємо A_n з умови нормування: $\int_0^a X_n^2(x) dx = 1$.

Таким чином $X_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\lambda_n x)$, де $\lambda_n = \frac{\pi n}{a}$, $n \in \mathbb{N}$.

Загальний розв'язок рівняння $Y_n'' - \lambda_n^2 Y_n = 0$ має вигляд:

$$Y_n(y) = C_n e^{\lambda_n y} + D_n e^{-\lambda_n y} = C_n \operatorname{sh} \lambda_n y + D_n \operatorname{sh} \lambda_n (b - y).$$

Тоді загальний розв'язок:

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) (C_n \operatorname{sh} \lambda_n y + D_n \operatorname{sh} \lambda_n (b - y))$$

Константи C_n та D_n знаходимо з додаткових умов:

$$U(x,0)=f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) D_n \operatorname{sh} \lambda_n b; \quad U(x,b)=g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) C_n \operatorname{sh} \lambda_n b.$$

$$D_n = \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda_n b} \int_0^a f(x) X_n(x) dx, \quad C_n = \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda_n b} \int_0^a g(x) X_n(x) dx.$$

Відповідь: $U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) (C_n \operatorname{sh} \lambda_n y + D_n \operatorname{sh} \lambda_n (b - y))$

Розв'язок рівняння Лапласа та Пуассона в крузі та кільці методом відокремлення змінних. Приклад.

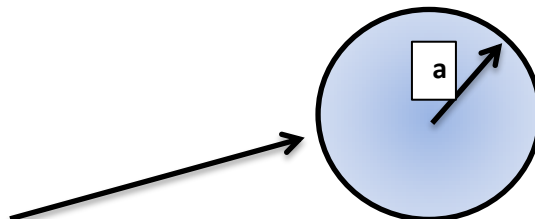
$x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ і навпаки $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$

$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ - оператор Лапласа в полярних координатах.

Функція в координатах $u(\rho, \varphi)$

$$\Delta u(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

Розглядаємо рівняння в такій області.



Майже завжди $u(a, \varphi) = g(\varphi)$ – додаткова умова.

Розв'язання:

$$v(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) \Phi + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} R = 0 \quad \Bigg| \quad \frac{\rho^2}{R\Phi} - \text{домножимо}$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) \frac{1}{R} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \text{це ми можемо переписати так:}$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) = -n^2 - \text{константа відокремлення змінних}$$

$$\text{Маємо } \begin{cases} \Phi'' + n^2 \Phi = 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \end{cases}$$

Розв'язок має такий вигляд: $n = 0$: $\Phi_0(\varphi) = C' + D_\varphi$, $D = 0$, щоб задовольнялася умова $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$

$n \neq 0$: $\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$, щоб задовольнялася умова, треба щоб $n \in \mathbb{N}$.

Дійсно $n\varphi \rightarrow n(\varphi + 2\pi) = n\varphi + 2\pi n$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{\partial R_n}{\partial \rho} \right) - n^2 R_n = 0 - \text{друге рівняння}$$

$$n = 0 : R_0 = C + D \ln \rho$$

$$n \neq 0 : R_n = C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}$$

Запишемо загальний розв'язок рівняння $\Delta u(\rho, \varphi) = 0$

$$u(\rho, \varphi) = R_0(\rho)\Phi_0(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\rho)\Phi_n(\varphi) = \\ C + D \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

$D_n = 0$ – задовільняємо сингулярну крайову умову на лівому краю відрізка.

Розв'язок задаємо умовою $0 \leq \rho \leq a$

Розв'язок підставимо в рівняння і знайдемо коефіцієнти.

Остаточно, $u(\rho, \varphi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = [\text{внесемо } C_n \text{ в } A_n \text{ і } B_n] = C + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = u(\rho, \varphi)$

Покладемо $\rho = a$, тоді $u(a, \varphi) = g(\varphi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$

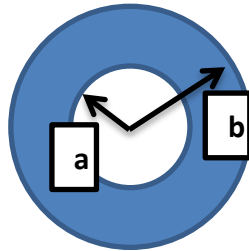
$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) d\varphi; \quad A_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi; \quad B_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi$$

$0 \leq \rho < a$ – це внутрішня задача (область в середині круга)

$a < \rho < \infty$ - це зовнішня задача (область за межами круга)

$$u(\rho, \varphi) = C \pm D \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n})$$

Якщо задача буде в кільці:



Тут будуть ще межові умови $u(a, \varphi) = g_1(\varphi)$, $u(b, \varphi) = g_2(\varphi)$

Гармонічні поліноми та їх властивості. Означення сферичних функцій.

Розглядаємо гармонічний поліном в тривимірному просторі. x, y, z – декартові координати.

Означення 1. $U(x, y, z) = \sum_{p,q,r} U_{p,q,r} x^p y^q z^r$ – добуток декартових координат

Означення 2. Однорідний поліном порядку l має вигляд

$$U_l(x, y, z) = \sum_{\substack{p,q,r \geq 0 \\ p+q+r=l}} U_{p,q,r} x^p y^q z^r$$

Лема. Однорідний поліном порядку l $U_l(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, де $\alpha \in \mathbb{R}$ дорівнює $\alpha^l u_l(x, y, z)$

◆ Зміна $x \rightarrow \alpha x, y \rightarrow \alpha y, z \rightarrow \alpha z$, тоді $\alpha^p \alpha^q \alpha^r = \alpha^l$ – винести ◆

Означення 3. Гармонічний однорідний поліном порядку l .

$$\Delta_{x,y,z} U_l(x, y, z) = 0$$

$H_l(\mathbb{R}^3)$ – множина гармонічних поліномів порядку l

Щоб належати до множини, треба умови $\Delta U_l(x, y, z) = 0$

Теорема 1. Число лінійно незалежних гармонічних поліномів, розмірність $h_l = \dim H_l = 2l + 1$

◆ 1) k_l – число лінійно незалежних однорідних поліномів

$$k_l = 1 + 2 + \dots + (l + 1) = \frac{1}{2}(l + 1)(l + 2)$$

Якщо $r = l$, то z^l

$r = l - 1$, то xz^{l-1} або yz^{l-1}

...

$r = 0$, то y^l , xy^{l-1}

2) $\Delta U_l = U_{l-2} \equiv 0$

$k_l - k_{l-2} = h_l = 2l + 1$ ◆

Теорема 2. $\Delta_{x,y,z} f(w) = 0$, де $w =$

$z + ix \cos t + iy \sin t$, де $t \in \mathbb{C}$, то $f(w) \in \mathbb{C}^2$, задовольняє рівняння Лапласа

$$\begin{aligned} \diamond \Delta_{x,y,z} f(w) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(w) = \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] f''(w) \\ &= [(icost)^2 - sint^2 + 1] f''(w) = 0 \diamond \end{aligned}$$

$U_{lm}(x, y, z)$, де $l = 0, 1, 2, \dots$, при фіксованому l , $m = 2l + 1$

Традиційно позначаються $m = -l, -l + 1, \dots, l$.

Теорема 3. $U_{lm}(x, y, z) = \int_0^{2\pi} W^l e^{mit} dt = \int_0^{2\pi} (z + ixcost + iysint)^l e^{imt} dt$

$\diamond$ Формула бінома Ньютона $(a + b)^l = \sum_{\substack{p, q \geq 0 \\ p+q=l}} \frac{l!}{p! q!} a^p b^q$ – дає однорідний поліном

$(a + b + c)^l = \sum_{\substack{p, q, r \geq 0 \\ p+q+r=l}} \frac{l!}{p! q! r!} a^p b^q c^r$ – дає однорідний поліном

Розглянемо спеціальний поліном

$$W^l = (z + ixcost + iysint)^l = \sum_{\substack{p, q \geq 0 \\ p+q=l}} \frac{l!}{p! q!} (ixcost)^p (iysint)^q z^r$$

$\Delta_{x,y,z} W^l = 0$ – виконується за теоремою 2.

запишемо w по – іншому:

$W = Ae^{it} + B + Ce^{-it}$, де A, B, C лінійні вирази відносно x, y, z .

$$W^l = \sum_{m=-l}^l V_m e^{imt}, \text{ де } V_m = U_{lm}(x, y, z) = \int_0^{2\pi} W^l e^{imt} dt \diamond$$

Означення сферичних функцій

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$U_{lm}(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) = r^l U_{lm}(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) = r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$\Delta U_{lm}(x, y, z) = \Delta r^l Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0$$

Означення (Лаплас). $U_{lm}(x, y, z)|_{x^2+y^2+z^2=1} = N_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$

$Y_{lm}(\theta, \varphi) = N_{lm} e^{im\psi} \int_0^{2\pi} (\cos\theta + i\sin\theta \cos\psi)^l e^{-im\psi} d\psi$ – задає сферичну функцію

$$\int_{\substack{S^2 \\ \text{сфера}}} |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 d\sigma = \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2$$

Теорема 4. $U_{lm}(x, y, z) = \int_0^{2\pi} W^l e^{imt} dt = \int_0^{2\pi} (z + ix\cos t + iys\sin t)^l e^{imt} dt = r^l N_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$

$$\begin{aligned} & \diamond \int_0^{2\pi} (z + ix\cos t + iys\sin t)^l e^{imt} dt \\ &= r^l \int_0^{2\pi} (\cos\theta + i\sin\theta (\cos\varphi \cos t + \sin\varphi \sin t))^l e^{imt} dt \\ &= r^l \int_0^{2\pi} (\cos\theta + i\sin\theta \cos(\varphi - t))^l e^{imt} dt = [\psi = \varphi - t] \\ &= r^l e^{im\varphi} \int_0^{2\pi} (\cos\theta + i\sin\theta \cos\varphi) e^{-im\psi} d\varphi \end{aligned}$$

$$N_{lm} = \frac{(-i)^m}{2\pi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!(l+m)!}{(l!)^2}}$$

$$\Delta r^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0$$

Ортогональність та повнота системи сферичних функцій на сфері одиничного радіусу. Диференціальне рівняння сферичних функцій.

Доведемо, що сферичні функції для різних λ ортогональні на поверхні сфери Σ

Нехай $\Delta_{\theta,\varphi} Y_1 + \lambda_1 Y_1 = 0$; $\Delta_{\theta,\varphi} Y_2 + \lambda_2 Y_2 = 0$ (3), де

$$\Delta_{\theta,\varphi} \equiv \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\iint_{\Sigma} Y_2 \Delta_{\theta,\varphi} Y_1 d\Omega = - \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial Y_1}{\partial\theta} \frac{\partial Y_2}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial Y_1}{\partial\varphi} \frac{\partial Y_2}{\partial\varphi} \right\} d\Omega \quad (1) \quad d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

На поверхні сфери

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial\theta} \vec{e}_{\theta} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u}{\partial\varphi} \vec{e}_{\varphi}$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta A_{\theta} + \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial\varphi} \right) \right]$$

Отже, $\Delta_{\theta,\varphi} u = \text{div grad } u$

Тому можна записати

$$\iint_{\Sigma} Y_2 \Delta Y_1 d\Omega = - \iint_{\Sigma} \text{grad} Y_1 \cdot \text{grad} Y_2 d\Omega$$

Міняючи місцями в формулі (1) функції Y_1 та Y_2 і віднімаючи отриману формулу від (1) отримаємо

$$J = \iint_{\Sigma} \{ Y_2 \Delta_{\theta,\varphi} Y_1 - Y_1 \Delta_{\theta,\varphi} Y_2 \} d\Omega = 0 \quad (2)$$

Формули (1) і (2) – формули Гріна для оператора сферичних функцій.

З формули (2) випливає ортогональність Y_1 та Y_2

І справді, користуючись рівнянням (3), з формули (2)

$$J = (\lambda_2 - \lambda_1) \iint_{\Sigma} Y_1 Y_2 d\Omega = 0$$

Звідки при $\lambda_2 \neq \lambda_1$

$$\iint_{\Sigma} Y_1 Y_2 d\Omega = 0 \quad \text{або} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_1(\theta, \varphi) Y_2(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi = 0$$

Цим і доведено ортогональність сферичних ф-й для різних λ .

Для доведення повноти системи сферичних функцій спершу покажемо, будь-яка ϕ -я $f(\theta, \varphi)$, що має неперервні 2 похідні, може бути апроксимована деяким поліномом зі сферичних функцій. Розкладемо таку ϕ -ю в ряд Фур'є.

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m(\theta) \cos m\varphi + B_m(\theta) \sin m\varphi]$$

Використовуючи обмеженість 2 похідної

$$|A_m| < \frac{M}{m^2}, |B_m| < \frac{M}{m^2}, \text{ де } M = \max |f_{\varphi\varphi}|$$

Звідси випливає така оцінка

$$\left| f - \sum_{m=0}^{m_0} [A_m(\theta) \cos m\varphi + B_m(\theta) \sin m\varphi] \right| = |R_{m_0}| < 2M \sum_{m_0}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \varepsilon'$$

, де $0 < \varepsilon'$.

Коефіцієнти Фур'є $A_m(\theta)$ та $B_m(\theta)$, є неперервними функціями θ , що обертаються в 0 при $\theta = 0$ та $\theta = \pi$ можуть бути рівномірно апроксимовані лінійними комбінаціями приєднаних функцій m -го порядку

$$\left| A_m(\theta) - \sum_{k=0}^n a_k P_k^{(m)}(\cos \theta) \right| < \frac{\varepsilon'}{2m_0 + 1}$$

$$\left| B_m(\theta) - \sum_{k=0}^n b_k P_k^{(m)}(\cos \theta) \right| < \frac{\varepsilon'}{2m_0 + 1}$$

Тоді отримаємо:

$$\left| f(\theta, \varphi) - \sum_n \sum_{k=0}^n [a_k P_k^{(m)}(\cos \theta) \cos m\varphi + b_k P_k^{(m)}(\cos \theta) \sin m\varphi] \right| < 2\varepsilon'$$

, що і доводить можливість рівномірної апроксимації будь-якої двічі диференційованої ϕ -ї $f(\theta, \varphi)$ поліномом зі сферичних функцій. Звідси випливає, що і будь-яку ϕ -ю можна рівномірно апроксимувати поліномом сферичних функцій, що і доводить повноту системи функцій.

Сферичні функції задовольняють такому рівнянню

$$\Delta_{\theta, \varphi} Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

де

$$\Delta_{\theta,\varphi} \equiv \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$\Delta_3 \text{ має розв'язки } \Delta_3 \left(r^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \right) = 0 \quad \Delta_3 = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta,\varphi} \quad \Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

В 2-вимірному просторі $\Delta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$. Зробимо заміну: $r \rightarrow \sin\theta$ $\frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}$
отримаємо кутовий оператор Лапласа для 3 – вимірного простору

$$\Delta_r(r^l Y_{lm}) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta,\varphi}(r^l Y_{lm}) = 0$$

$$Y_{lm}(\Delta_r r^l) + r^{l-2} (\Delta_{\theta,\varphi}(Y_{lm})) = 0$$

Обчислимо $\Delta_r r^l = l(l+1)r^{l-2}$. Отже, $\Delta_{\theta,\varphi} Y_{lm} + l(l+1)Y_{lm} = 0$

Представлення фундаментального розв'язку рівняння Лапласа у вигляді ряду по сферичних функціях у випадку, коли особлива точка фундаментального розв'язку і центр координат не співпадають.

Якщо помістити заряд в центр ССК, то його потенціал буде рівний $U = \frac{1}{r}$.

Перемістимо заряд на відстань $\vec{a}$, тоді потенціал поля буде рівний $U = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|}$.

Теорема (про розклад фундаментального розв'язку рівняння Лапласа в ряд за СФ):

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} = \begin{cases} \frac{1}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta), & 0 \leq r < a \\ \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(\cos\theta), & r > a \end{cases},$$

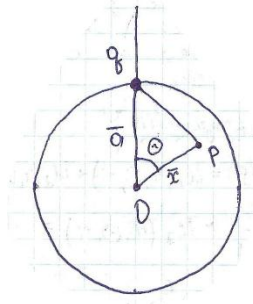
де $P_l(\cos(\theta)) = \frac{Y_{l0}(\theta, 0)}{Y_{l0}(0, 0)} = \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{l0}(\theta, \varphi)$ - поліном Лежандра
 $Y_{lm}(\theta, \varphi) \sim e^{im\varphi} \Theta(\theta)$

Доведення: Потенціал має задовольняти загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа у сферичних координатах:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{-l \leq m \leq l} (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Опишемо навколо точки O сферу радіуса a :

1) $r < a$: Потенціал має задовольняти р-ня Лапласа:



$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{l0}(\theta; 0)$$

Тут $B_{lm} = 0$ (внутр. задача) бо інакше при $r = 0$ і $r \rightarrow \infty$, $m=0$ (бо нема залежності від кута φ , якщо вісь OZ спрямувати вздовж вектора $\vec{a}$). Враховуючи, що $m=0$, перепозначено вище $A_{lm} \rightarrow A_l$

Розглянемо випадок, коли $\vec{r}$ і $\vec{a}$ колінеарні.

$$\text{Тоді } \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} = \frac{1}{a-r} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{r}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{l0}(0; 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_l = \frac{1}{a Y_{l0}(0; 0)}. \text{ Таким чином } \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} = \frac{1}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l \frac{Y_{l0}(\theta, \phi)}{Y_{l0}(0, 0)}.$$

2) $r > a$: Потенціал має задовольняти р-ня Лапласа:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} Y_{l0}(\theta; 0)$$

Тут аналогічно перепозначено $B_{lm} \rightarrow B_l$, бо $m=0$. Тут прийнято $A_{lm} = 0$, бо при $r \rightarrow \infty \Rightarrow u$ повинне $\rightarrow 0$. Далі $\vec{r} || \vec{e}_z \Rightarrow$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} = \frac{1}{r-a} = \frac{1}{r} \frac{1}{1 - (\frac{a}{r})} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} Y_{l0}(\theta; 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_l = \frac{1}{a Y_{l0}(0;0)}. \text{Таким чином } \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} = \frac{1}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \frac{Y_{l0}(\theta, \phi)}{Y_{l0}(0,0)} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(\cos\theta).$$

Доведено!

Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в сферичних координатах.

Загальний розв'язок рівняння Лапласа в сферичних координатах:

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) = 0$$

Загальний розв'язок: $u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{-l \leq m \leq l} (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \varphi)$

Шукатимемо спеціальний розв'язок у вигляді:

$$v(r, \theta, \varphi) = R(r)S(\theta, \varphi)$$

Має виконуватись рівняння Лапласа

$$\Delta v(r, \theta, \varphi) = 0$$

$$\left(\Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} \right) R(r)S(\theta, \varphi) = 0$$

Перепишемо у вигляді:

$$S(\theta, \varphi) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R(r)}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} S(\theta, \varphi) = 0$$

Шукаємо S, щоб задовольнити спектральну задачу

$$S(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi); \Delta_{\theta, \varphi} Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - l(l+1)R = 0$$

$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0$ – диференціальне рівняння Ейлера; розв'язком буде лінійна комбінація з степенями r^l та $r^{-(l+1)}$

2 фундаментальні розв'язки, отже отже ф-цію v запишемо:

$$v(r, \theta, \varphi) = (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Для лінійного рівняння Лапласа виконується принцип суперпозиції.

Для рівняння Шредінгера для атома водню:

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) + V(r)u(r, \theta, \varphi) = 0$$

Тоді

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - l(l+1)R + V(r)R = 0$$

Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі методом відокремлення змінних. Приклад.

$$\begin{cases} \Delta U(r, \theta, \varphi) = 0 \\ D = \{r, \theta, \varphi\} \quad 0 < r < a \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\ U(a, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) \end{cases}$$

D – область в якій розв'язується задача

f – потенціал на поверхні.

Загальний вигляд розв'язку

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$B_{lm} = 0$ (при $r=0$ $r^{-(l+1)} \rightarrow \infty$ що неможливо для р-ня Лапласа)

Тоді розв'язок прийме вигляд:

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} r^l \times Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Задовольнимо початкові умови:

$$f(\theta, \varphi) = U(a, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} a^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

- розклад в ряд Фур'є-Бесселя по сферичним функціям.

$A_{lm} a^l = f_{lm} = \int_{S^2} f(\theta, \varphi) \overline{Y_{lm}(\theta, \varphi)} d\sigma$ інтегрування по поверхні, де $d\sigma = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$ – елемент поверхні у сферичних координатах.

Означення та класифікація циліндричних функцій. Співвідношення між циліндричними функціями Беселя, Неймана та Ханкеля. Інтегральні зображення циліндричних функцій.

(УВАГА! Всюди потрібно замінити u на v (в конспекті v), тут так щоб не плутати із $ню$. Тут ніде не написано v , тільки v (ню))

ОЗН. – Циліндричною називається функція, що задається наступним інтегралом:

$$Z_v(z) = D \int_{\Gamma} d\xi \exp[iz \sin \xi - i v \xi], \text{ де } z = \lambda \rho v, \quad \text{де } D - \text{ стала нормування.}$$

Теорема 1

якщо $\Delta f(u) = 0$ при $f \in C^2$, то $ix \sin t + iy \cos t + z = u$, де $(x, y, z) \in R^3$ декартові координати, $t \in C$

$$\blacktriangleleft \Delta f(u) = f_{xx}(u) + f_{yy}(u) + f_{zz}(u) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] f_{uu}(u) = [-\sin^2 t - \cos^2 t + 1] f_{uu}(u) = 0 \blacktriangleright$$

//Приклад: $f_{\lambda}(u) = \exp[\lambda u]$, $\lambda \in C$ то $\Delta f(u) = 0$;

Зробивши перехід до ЦСК:

$$x = \rho \sin(\phi); y = \rho \cos(\phi); z = z; \text{ маємо}$$

$$u = ix \sin t + iy \cos t + z = i\rho \cos \phi \sin t + i\rho \sin \phi \cos t + z = i\rho(\sin(\phi + t)) + z$$

Теорема 2

якщо $G_{\lambda, v}(\rho, \phi, z) = \int_{\Gamma} \exp[\lambda u - i v t] dt$, де $u = i\rho(\sin(\phi + t)) + z$, тоді

$$1) \Delta G_{\lambda, v}(\rho, \phi, z) = 0, \forall \lambda, v \in R \quad (\text{є розв'язком рівняння Лапласа})$$

$$2) G_{\lambda, v}(\rho, \phi, z) = \exp[\lambda t] \exp[i v \phi] Z_v(\lambda \rho)$$

$$\blacktriangleleft 1) \Delta G_{\lambda, v}(\rho, \phi, z) = \Delta \int_{\Gamma} \exp[\lambda u - i v t] dt = \int_{\Gamma} (\Delta \exp[\lambda u]) \exp[-i v t] dt = 0$$

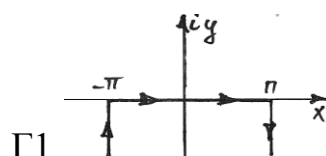
$$G_{\lambda, \nu}(\rho, \phi, z) = \int_{\Gamma} \exp[\lambda u - i \nu t] = \int_{\Gamma} \exp[i \rho(\sin(\phi + t)) + z] \exp[-i \nu t] dt =$$

$$2) = |\phi + t = \xi| = \exp[\lambda z] \exp[i \nu \phi] \int_{\Gamma} \exp[i \lambda \rho \sin \xi - i \nu \xi] d\xi$$

Стандартні циліндричні функції:

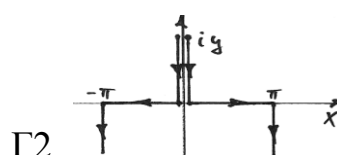
1. Функція Бесселя:

$$I_{\nu}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \exp[i \lambda \rho \sin \xi - i \nu \xi] d\xi$$



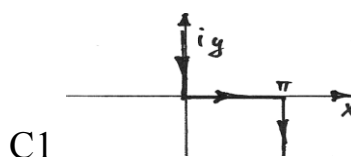
2. Функція Неймана:

$$Y_{\nu}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \exp[i \lambda \rho \sin \xi - i \nu \xi] d\xi$$

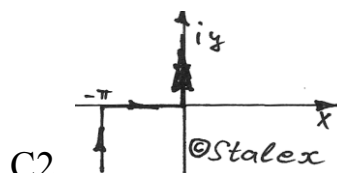


3. Функції Ханкеля:

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} \exp[i \lambda \rho \sin \xi - i \nu \xi] d\xi$$



$$H_{\nu}^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{C_2} \exp[i \lambda \rho \sin \xi - i \nu \xi] d\xi$$



Теорема 3 (Про зв'язок між функціями)

$$I_{\nu}(z) = \frac{1}{2} [H_{\nu}^{(1)}(z) + H_{\nu}^{(2)}(z)] \quad Y_{\nu}(z) = \frac{1}{2i} [H_{\nu}^{(1)}(z) - H_{\nu}^{(2)}(z)]$$

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = I_{\nu}(z) + iY_{\nu}(z) \quad H_{\nu}^{(2)}(z) = I_{\nu}(z) - iY_{\nu}(z)$$

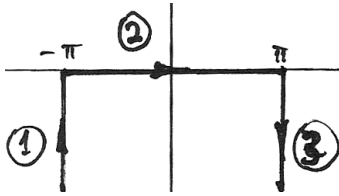
Аналогія з рівняннями Ейлера:

$$I_{\nu}(z) \div \cos z \quad Y_{\nu}(z) \div \sin z \quad H_{\nu}^{(1)} \div \exp[iz] \quad H_{\nu}^{(2)} \div \exp[-iz]$$

$$I_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \exp[iz \sin \xi - i\nu \xi] d\xi = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{C_1} \exp[iz \sin \xi - i\nu \xi] d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{C_2} \exp[iz \sin \xi - i\nu \xi] d\xi \right] =$$

$$= \frac{1}{2} (H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)), \quad \Gamma = C_1 \cup C_2$$

Інтегральні зображення (Шека, бо Б-с не дав)



$$t = \frac{z}{2} \exp[i\xi] \Rightarrow i\xi = \ln \frac{2t}{z} \Rightarrow d\xi = \frac{dt}{it}; \quad \sin \xi = \frac{\exp[i\xi] - \exp[-i\xi]}{2i} = \frac{(2t/z) - (z/2t)}{2i}$$

$$\exp[-i\nu \xi] = (\exp[i\xi])^{-\nu} = \left(\frac{2t}{z}\right)^{-\nu}; \quad I_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{dt}{it} \exp\left[iz\left(\frac{2t}{z} - \frac{z}{2t}\right) \frac{1}{2i}\right] \left(\frac{z}{2t}\right)^\nu$$

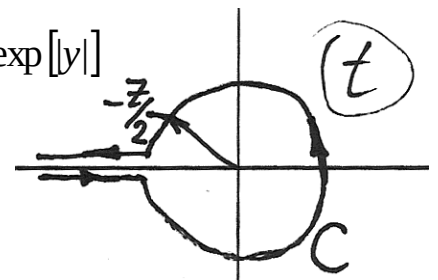
$$I_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_C \frac{dt}{t^{\nu+1}} \exp\left[t - \frac{z^2}{4t}\right] = J_\nu(z) \text{ - формула Соніна - Шлефлі (не впевнений у першому прізвищі)}$$

$$z \in R_t \quad t = \frac{z}{2} \exp[i\xi]$$

$$1) \xi = -\pi - i|y| \quad 0 < |y| < \infty \quad t = \frac{z}{2} \exp[i(-\pi - i|y|)] = \frac{z}{2} \exp[-i\pi] \exp[|y|]$$

$$2) \xi = x \quad -\pi < x < \pi \quad t = \frac{z}{2} \exp[ix]$$

$$3) \xi = \pi - i|y| \quad t = -\frac{z}{2} \exp[|y|]$$



$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_C \frac{dt}{t^{\nu+1}} \exp\left[t - \frac{z^2}{4t}\right]; \quad \omega = \frac{2t}{z}; \quad t = \frac{z}{2} \omega; \quad dt = \frac{z}{2} d\omega; \quad t^{\nu+1} = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} \omega^{\nu+1}$$

$$t - \frac{z^2}{4t} = \frac{z\omega}{2} - \frac{2z^2}{4z\omega} = \frac{z}{2} \left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)$$

Циліндричні функції у випадку, коли незалежна змінна прямує до нуля або до нескінченності. Метод перевалу. Приклади.

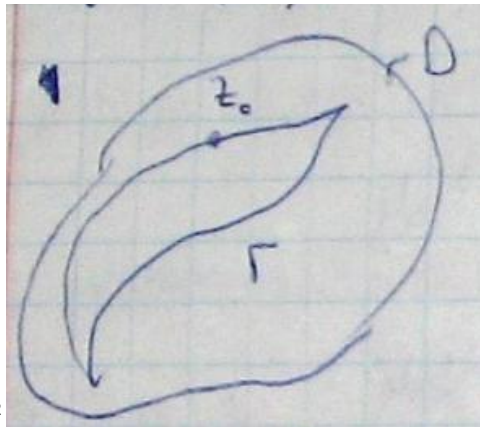
$$I(x) = \int_{\Gamma} \phi(z) \exp[xf(z)] dz \approx \phi(z_0) \exp[xf(z_0)]^* \sqrt{\frac{-2\pi}{xf''(z_0)}}; \quad x \rightarrow \infty; \quad f'(z_0) = 0$$

$\phi(z), f(z) \in A(D), \Gamma \subset D, z_0 \in D$ (асимптотичне наближення)

$z_0, f'(z_0) = 0$ - критична точка



Підінтегральний вираз – аналітична ф-ція. Виберемо контур щоб дійсна ч-на ф-ції $f(z)$ була від'ємною.



$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0) (z - z_0)^2$$

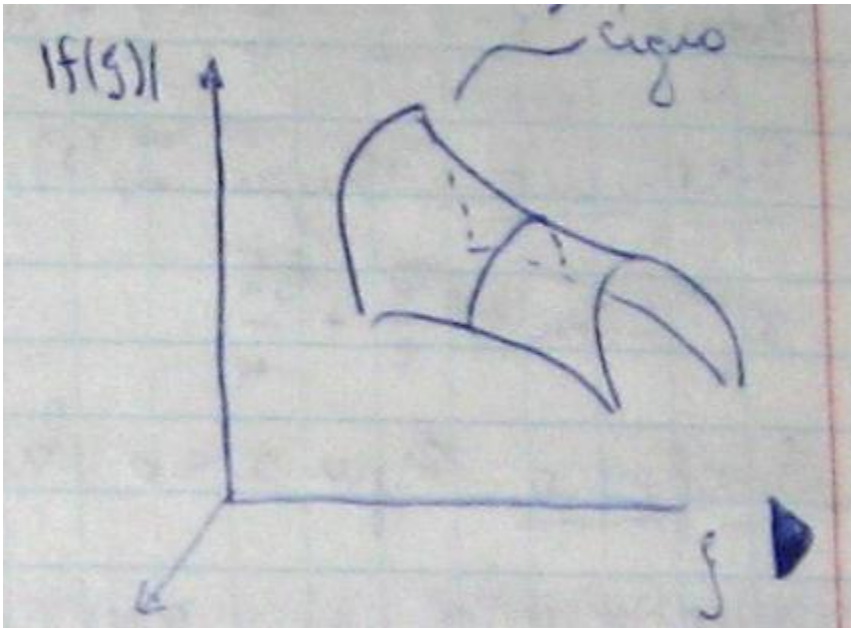
Розглянемо інтеграл

$$I(x) = \int_{\Gamma} \phi(z) \exp[xf(z)] dz \cong \phi(z_0) \exp[xf(z_0)] \int_{\Gamma} \exp\left[\frac{1}{2} xf''(z_0)(z - z_0)^2\right] dz$$

$S^2 = -\frac{1}{2} f''(z_0) (z - z_0)^2 \in \Re_+$ - щоб було дійсним має виконуватись умова:

$$0 = \pi + \arg f''(z_0) + 2 \arg(z - z_0), \quad s = \sqrt{-\frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)}, \quad ds = \sqrt{-\frac{1}{2} f''(z_0)} dz$$

$$I(x) = \phi(z_0) \sqrt{-\frac{2}{f''(z_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x s^2] ds = \phi(z_0) \sqrt{-\frac{2\pi}{xf''(z_0)}}$$



(Асимптотичні формули для $x \gg \nu$, при $x \rightarrow \infty$)

$$I_\nu(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right); \quad Y_\nu \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$H_\nu^{(1)}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[i\left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]; \quad H_\nu^{(2)}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-i\left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

◀ Розглянемо $H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} \exp[ix \sin \xi - i\nu \xi] d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} \exp[ix(\sin \xi - \nu/x \xi)] d\xi.$

Застосуємо теорему перевалу

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\pi}, \quad f(\xi) = i \sin \xi - i \frac{\nu}{x} \xi$$

$$i \cos \xi - i \frac{\nu}{x} = 0, (x \gg \nu) \Rightarrow \xi_0 = \pi/2$$

Знайдемо точку перевалу:

$$f(\xi_0) = i\left(1 - \frac{\nu}{x} \frac{\pi}{2}\right); \quad f''(\xi_0) = -i$$

Тоді застосовуючи власне теорему маємо

$$H_\nu^{(1)} = \frac{1}{\pi} \exp\left[i\left(x - \nu \frac{\pi}{2x}\right)\right] \sqrt{\frac{2\pi}{ix}} = \exp\left[i\left(x - \nu \frac{\pi}{2x}\right)\right] \sqrt{\frac{2}{ix\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-i\left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\sqrt{\frac{1}{i}} = \exp\left[-i\frac{\pi}{4}\right]$$

Всі інші доводяться на основі вираження одних ф-й через інші. ►

$$\underline{\text{T.3}} \text{ При } x \rightarrow +0, \nu > 0 \quad |I_\nu(x)| < +\infty; |Y_\nu(x)|, |H_\nu^{(1)}|, |H_\nu^{(2)}| \rightarrow +\infty$$

◀ $Z_\nu(x) = \int \exp[ix \sin \xi - i\nu \xi] d\xi$ Всі ці функції записуються одним і тим же інтегральним виразом по різних контурах. (конттури див біл.13). Їх можна представити у вигляді лін. комб. таких інтегралів:

$$\left| \int_0^{i\infty} \exp[ix \sin \xi - i\nu \xi] d\xi \right| = \left| \begin{matrix} \xi = iy, y > 0 \\ \sin(iy) = ish(y) \end{matrix} \right| = \left| \int_0^\infty \exp[\nu y - xsh(y)] dy \right|;$$

$$\left| \int_0^{\pm\pi} \exp[ix \sin \xi - i\nu \xi] d\xi \right| \leq \int_0^\pi |\exp[i(x \sin \xi - \nu \xi)]| d\xi \leq \pi;$$

$$\left| \int_{\pm\pi}^{-i\infty \pm \pi} \exp[ix \sin \xi - i\nu \xi] d\xi \right| = \left| \begin{matrix} \xi = -iy \pm \pi, \\ \sin(-iy \pm \pi) = ish(y) \end{matrix} \right| = \left| \int_0^\infty \exp[-\nu y - xsh(y)] dy \right| < +\infty$$

З отриманих результатів видно: інт-ли по контуру у верх. пів-пл-ні розбіжні, а у ниж, і на дійсній прямій збіж. З огляду на контури робимо висновок

$$|I_\nu(x)| < +\infty; |Y_\nu(x)|, |H_\nu^{(1)}|, |H_\nu^{(2)}| \rightarrow +\infty.$$

Диференціальне рівняння для циліндричних функцій. Ортогональність і повнота системи циліндричних функцій на відрізку. Ряди Фур'є-Бесселя.

1) Теорема: Нехай функція $Z_\nu(\lambda\rho) = \omega(\rho)$, є розв'язком такого рівняння $\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\omega}{d\rho} \right) + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) \omega = 0$, то тоді ця функція $\omega(\rho)$ є циліндричною. (рівняння Бесселя).

Доведення:

Було доведено, що $\Delta \left(e^{\lambda z} e^{i\nu\varphi} Z_\nu(\lambda\rho) \right) = 0$. (дивись теор.питання №13, властивості циліндричних функцій). Лапласіан в циліндричних координатах має вигляд: $\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Підставимо його:

$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \left(e^{\lambda z} e^{i\nu\varphi} Z_\nu(\lambda\rho) \right) = 0$. Розкривши дужки, виконавши диференціювання по φ і z та скоротивши на експоненти маємо такий вираз:

$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{\nu^2}{\rho^2} + \lambda^2 \right) Z_\nu(\lambda\rho) = 0$. Розкривши дужки (подіявши цим оператором) та замінивши $Z_\nu(\lambda\rho) = \omega(\rho)$ маємо рівняння Бесселя. **Доведено ■**

2) Загальний розв'язок рівняння Бесселя можна представити у вигляді: $\omega = E \cdot J_\nu(\lambda\rho) + F \cdot Y_\nu(\lambda\rho) = E' \cdot H_\nu^{(1)}(\lambda\rho) + F' \cdot H_\nu^{(2)}(\lambda\rho)$, де $J_\nu, Y_\nu, H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$ – функції Бесселя, Неймана, та Ханкеля (1 і 2 роду) відповідно. Умова лінійної незалежності функцій – нерівність нулеві Вронскіана системи: $W(J_\nu, Y_\nu) = J_\nu \frac{\partial}{\partial \rho} Y_\nu - Y_\nu \frac{\partial}{\partial \rho} J_\nu$.

Введемо оператор диф. рівняння Бесселя: $L_\nu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\nu^2}{\rho^2}$. Звідси рівняння Бесселя в операторному вигляді: $L_\nu \omega(\rho) = \lambda^2 \omega(\rho)$, $a < \rho < b$. Також накладемо крайові умови (у загальному вигляді) і тоді маємо таку задачу Штурма-Ліувілля:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_\nu \omega(\rho) = \lambda^2 \omega(\rho), a < \rho < b \\ \alpha \omega(a) + \beta \omega'(a) = 0, \alpha^2 + \beta^2 > 0 \\ \gamma \omega(b) + \delta \omega'(b) = 0, \gamma^2 + \delta^2 > 0 \end{array} \right.$$

Теорема: Розв'язок такої ЗШЛ є набір власних чисел $\lambda_n^{(\nu)}$, $n \in \mathbb{N}$ та відповідних їм власних функцій: $\omega_n(\rho) = Z_\nu \left(\lambda_n^{(\nu)} \rho \right)$, $n \in \mathbb{N}$, причому система таких функцій $\omega_n(\rho)$ повна і ортогональна, тобто виконується умова:

$$\int_b^a \omega_n(\rho) \omega_m(\rho) \rho d\rho = \delta_{nm} d^2(\lambda_n^{(\nu)}, a, b), \text{ де } d^2(\lambda_n^{(\nu)}, a, b) = \frac{\rho}{2\lambda_n} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda_n} \omega_n(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \omega_n(\rho) - \omega_n(\rho) \frac{\partial^2}{\partial \lambda_n \partial \rho} \omega_n(\rho) \right]_{\rho=a}^{\rho=b} - \text{нормувальний множник.}$$

Доведення: візьмемо дві власні функції ω_n, ω_m та відповідні їм рівняння $L\omega_n = \lambda_n^2 \omega_n$ та $L\omega_m = \lambda_m^2 \omega_m$. Домножимо перше рівняння на ω_m , а друге – на ω_n та віднімемо одне від одного. Після цього інтегруємо від a до b : $(\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \int_a^b \omega_n \omega_m \rho d\rho = \int_a^b (\omega_m L\omega_n - \omega_n L\omega_m) \rho d\rho = \int_a^b \left[\omega_n \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\omega_m}{d\rho} \right) - \omega_m \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\omega_n}{d\rho} \right) \right] d\rho = \int_a^b \frac{d}{d\rho} \left[\omega_n \left(\rho \frac{d\omega_m}{d\rho} \right) - \omega_m \left(\rho \frac{d\omega_n}{d\rho} \right) \right] d\rho = \rho \left[\omega_n \frac{d\omega_m}{d\rho} - \omega_m \frac{d\omega_n}{d\rho} \right] \Big|_{\rho=a}^{\rho=b}$. Отже маємо: $\int_a^b \omega_n \omega_m \rho d\rho = \frac{\rho}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2} \left[\omega_n \frac{d\omega_m}{d\rho} - \omega_m \frac{d\omega_n}{d\rho} \right] \Big|_{\rho=a}^{\rho=b}$.

Розглянемо випадок $\lambda_n^2 \neq \lambda_m^2$. Мають виконуватись умови $\alpha \omega_n(a) + \beta \omega'_n(a) = 0, \alpha \omega_m(a) + \beta \omega'_m(a) = 0, \alpha^2 + \beta^2 > 0$. Це можливо лише коли визначник системи рівний нулеві. Тобто $\begin{vmatrix} \omega_n(a) & \omega'_n(a) \\ \omega_m(a) & \omega'_m(a) \end{vmatrix} = \omega'_m(a) \omega_n(a) - \omega'_n(a) \omega_m(a) = 0$. Аналогічно доводиться тотожність для b . Звідси $\int_a^b \omega_n \omega_m \rho d\rho = 0$.

Розглянемо випадок $\lambda_n^2 = \lambda_m^2$. $\int_a^b \omega_m^2 \rho d\rho = \lim_{\lambda_n^2 \rightarrow \lambda_m^2} \frac{\rho}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2} \left[\omega_n \frac{d\omega_m}{d\rho} - \omega_m \frac{d\omega_n}{d\rho} \right] \Big|_{\rho=a}^{\rho=b} =$
 $|\text{правило Лопіталя}| = \frac{\rho}{2\lambda_m} \left[\frac{\partial \omega_m}{\partial \lambda_m} \frac{\partial \omega_m}{\partial \rho} - \omega_m \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial \lambda_m \partial \rho} \right] \Big|_{\rho=a}^{\rho=b} = d^2(\lambda_m)$. **Доведено ■**

3) Наслідок (попередньої теореми):

Нехай функція $f(\rho) \in L^2(\rho, [a, b])$ квадратично-інтегровна на проміжку $[a, b]$, тобто $\int_a^b f^2(\rho) \rho d\rho < +\infty$. Таку функцію можна розкласти в ряд Фур'є по циліндричних функціях $u_n = Z_\nu(\lambda_n^{(\nu)} \rho)$. Такі ряди називаються рядами Фур'є-Бесселя. Коефіцієнти Фур'є такого ряду визначаються формулою:

$$f_n = \int_a^b f(\rho) u_n(\rho) \rho d\rho = \frac{1}{d^2(\lambda_m)} \int_a^b f(\rho) Z_\nu(\lambda_n^{(\nu)} \rho) \rho d\rho.$$

Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в циліндричних координатах.

Рівняння Лапласа має вигляд: $\Delta u(\rho, \varphi, z) = 0$, де ρ, φ, z – циліндричні координати.

Розв'язок такого рівняння шукатимемо у вигляді: $u(\rho, \varphi, z) = A(z)B(\varphi)C(\rho)$.

В циліндричних координатах оператор Лапласа має вигляд:

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Оскільки $x = \rho \cdot \cos \varphi$, $y = \rho \cdot \sin \varphi$, $z = z$, а оператор Лапласа в декартових координатах має вигляд:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Тому для циліндричних координат отримаємо:

$$\Delta u(\rho, \varphi, z) = \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A(z)B(\varphi)C(\rho) = 0$$

Після виконання всіх диф. Операцій, отримаємо:

$$\Delta u(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{C(\rho)} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dC(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{B(\varphi)} \cdot \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 B(\varphi)}{d\varphi^2} + \frac{1}{A(z)} \cdot \frac{d^2 A(z)}{dz^2} = 0$$

Востаньому рівнянню частинні похідні замінені на повні, оскільки, функції $G(z)$, $\Phi(\varphi)$, $R(\rho)$ – залежать лише від тих змінних, по яких диференціюємо.

$$\frac{1}{A(z)} \cdot \frac{d^2 A(z)}{dz^2} = - \left\{ \frac{1}{B(\varphi)} \cdot \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 B(\varphi)}{d\varphi^2} + \frac{1}{C(\rho)} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dC(\rho)}{d\rho} \right) \right\} = \lambda^2$$

$$\frac{1}{B(\varphi)} \cdot \frac{d^2 B(\varphi)}{d\varphi^2} = - \left\{ \rho^2 \lambda^2 + \frac{1}{C(\rho)} \cdot \rho \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dC(\rho)}{d\rho} \right) \right\} = -\nu^2$$

$$\frac{1}{C(\rho)} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dC(\rho)}{d\rho} \right) = \frac{\nu^2}{\rho^2} - \lambda^2$$

Таким чином ми відокремили змінні і отримали три незалежні рівняння:

$$\begin{cases} \frac{d^2 A(z)}{dz^2} - \lambda^2 A(z) = 0 \\ \frac{d^2 B(\varphi)}{d\varphi^2} + \nu^2 B(\varphi) = 0 \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dC(\rho)}{d\rho} \right) + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) C(\rho) = 0 \end{cases}$$

Два перших рівняння – диференціальні рівняння другого порядку, розв'язками яких очевидно є:

$$A(z) = A_\lambda e^{\lambda z} + B_\lambda e^{-\lambda z} = A'_\lambda sh(\lambda z) + B'_\lambda ch(\lambda z) = A''_\lambda sh(\lambda z) + B''_\lambda sh(\lambda(l-z))$$

$$B(\varphi) = C_\nu \cos(\nu\varphi) + D_\nu \sin(\nu\varphi)$$

Останнє рівняння системи – рівняння Бесселя, розв'язком якого є:

$$C(\rho) = E_{\lambda\nu} J_\nu(\lambda\rho) + F_{\lambda\nu} Y_\nu(\lambda\rho) = E'_{\lambda\nu} H_\nu^{(1)}(\lambda\rho) + F'_{\lambda\nu} H_\nu^{(2)}(\lambda\rho)$$

Де $J_\nu(\lambda\rho)$ - функція Бесселя, $Y_\nu(\lambda\rho)$ - функція Неймана, $H_\nu^{(1)}(\lambda\rho)$ і $H_\nu^{(2)}(\lambda\rho)$ - функції Ганкеля першого та другого роду.

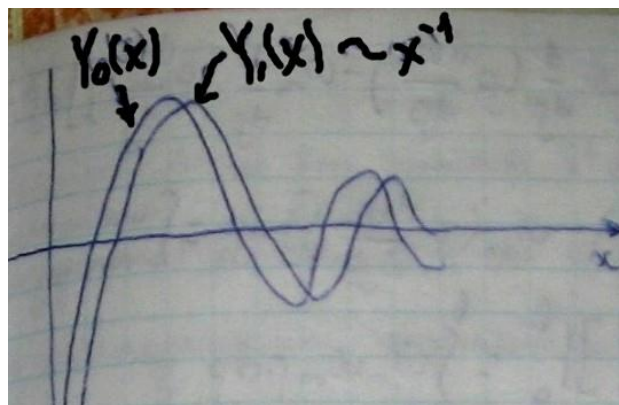
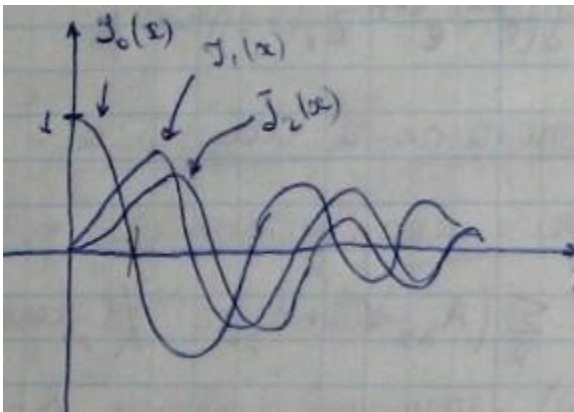
Отже загальний розв'язок рівняння Лапласа в циліндричних координатах має вигляд:

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{\lambda} \sum_{\nu} [A_\lambda e^{\lambda z} + B_\lambda e^{-\lambda z}] \cdot [C_\nu \cos(\nu\varphi) + D_\nu \sin(\nu\varphi)] \cdot [E_{\lambda\nu} J_\nu(\lambda\rho) + F_{\lambda\nu} Y_\nu(\lambda\rho)]$$

Де $A_\lambda, B_\lambda, C_\nu, D_\nu, E_{\lambda\nu}, F_{\lambda\nu}$ – коефіцієнти, які можна знайти з граничних умов.

Рівняння Лапласа разом з граничними умовами для функції u називається задачею Діріхле, з цієї задачі і визначається вигляд коефіцієнтів загального розв'язку рівняння Лапласа.

Графіки стандартних циліндричних функцій



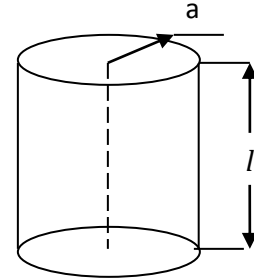
Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в циліндрі методом відокремлення змінних. Приклад.

Рівняння Лапласа разом з граничними умовами для функції u називається задачею Діріхле.

Рівняння Лапласа в області D має вигляд:

$\Delta u(\rho, \varphi, z) = 0$, де ρ, φ, z – циліндричні координати.

$$\left. \begin{aligned} u(\rho, \varphi, 0) &= f_1(\rho, \varphi) \\ u(\rho, \varphi, l) &= f_2(\rho, \varphi) \\ u(0, \varphi, z) &= f_3(\varphi, z) \end{aligned} \right\} - \text{межові умови.}$$



Область D :

$$D = \{\rho, \varphi, z | 0 < \rho < a; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 < z < l\}$$

Загальний розв'язок рівняння Лапласа в циліндричних координатах має вигляд:

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{\lambda} \sum_{\nu} [A_{\lambda} e^{\lambda z} + B_{\lambda} e^{-\lambda z}] \cdot [C_{\nu\lambda} \cos(\nu\varphi) + D_{\nu\lambda} \sin(\nu\varphi)] \cdot [E_{\lambda\nu} J_{\nu}(\lambda\rho) + F_{\lambda\nu} Y_{\nu}(\lambda\rho)]$$

Коефіцієнт $F_{\lambda\nu} = 0$ оскільки функція Неймана $Y_{\nu}(\lambda\rho) \rightarrow \infty$, коли $\rho \rightarrow 0$.

Очевидно, що якщо азимутальний кут $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, то $u(\rho, \varphi, z) = u(\rho, \varphi + 2\pi k, z)$, де k – ціле число, звідки висновок, що $\nu = n$ – натуральне число. Отже розв'язок будемо шукати в такому вигляді.

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{\lambda n} e^{\lambda z} + B_{\lambda n} e^{-\lambda z}] \cdot [C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi)] \cdot J_n(\lambda\rho)$$

Поклавши $E_{\lambda\nu} = 1$.

$u(\rho, \varphi, z) = u^I + u^{II} + u^{III}$, де u^I – розв'язок рівняння Лапласа на нижній основі циліндра, u^{II} – на верхній основі циліндра, u^{III} – на бічній грані.

$$\Delta u^I(\rho, \varphi, z) = 0$$

$$u(\rho, \varphi, 0) = f_1(\rho, \varphi)$$

$$u(\rho, \varphi, l) = 0 \Rightarrow \boxed{J_n(\lambda a) = 0}$$

$$u(0, \varphi, z) = 0$$

$$u^I(\rho, \varphi, z) = \sum_{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} sh(\lambda(l-z)) \cdot [C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi)] \cdot J_n(\lambda\rho)$$

Оскільки $J_n(\lambda a) = 0 \Rightarrow \lambda_k^{(n)} = \frac{x_k^{(n)}}{a}$, де k - натуральне число.

$$u^I(\rho, \varphi, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} sh\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}(l-z)\right) \cdot [C_{nk} \cos(n\varphi) + D_{nk} \sin(n\varphi)] \cdot J_n\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}\rho\right)$$

Покладемо $z=0$:

$$f_1(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} sh\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}l\right) \cdot [C_{nk} \cos(n\varphi) + D_{nk} \sin(n\varphi)] \cdot J_n\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}\rho\right)$$

$$C_{nk} = \frac{1}{sh\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}\rho\right) \pi(1 + \delta_{n,0}) d^2\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}\right)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho d\rho f_1(\rho, \varphi) \cos(n\varphi) J_n\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}\rho\right)$$

$$D_{nk} = \frac{1}{sh\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}\rho\right) \pi d^2\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}\right)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho d\rho f_1(\rho, \varphi) \sin(n\varphi) J_n\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}\rho\right)$$

Де $d^2\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}\right)$ - нормуючий коефіцієнт

$$\underline{\Delta u^{II}(\rho, \varphi, z) = 0}$$

$$u(\rho, \varphi, 0) = 0$$

$$u(\rho, \varphi, l) = f_2(\rho, \varphi)$$

$$u(0, \varphi, z) = 0$$

$$u^{II}(\rho, \varphi, z) = u^I(\rho, \varphi, l-z)$$

Те саме, що і в першому випадку тільки $z \rightarrow (l-z)$, $f_1 \rightarrow f_2$ (замінити в інтегралах f_1 на f_2)

$$\underline{\Delta u^{III}(\rho, \varphi, z) = 0}$$

$$1) u(\rho, \varphi, 0) = 0$$

$$2) u(\rho, \varphi, l) = 0$$

$$3) u(a, \varphi, z) = f_3(\varphi, z)$$

$$u^{III}(\rho, \varphi, z) = \sum_{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{\lambda n} e^{\lambda z} + B_{\lambda n} e^{-\lambda z}] \cdot [C_{\lambda n} \cos(n\varphi) + D_{\lambda n} \sin(n\varphi)] \cdot J_n(\lambda \rho)$$

Задовільнимо умови 1 та 2:

$$[A_{\lambda n} e^{\lambda z} + B_{\lambda n} e^{-\lambda z}]_{z=0,l} = 0 \Rightarrow \lambda = i\mu, \mu \in \mathbb{R}$$

$$[A_{\lambda n} e^{\lambda z} + B_{\lambda n} e^{-\lambda z}] = C \sin(\mu z)$$

Φ -я $sh(\mu z)$ повинна обертатись в нуль при $z = 0, l$:

$$\sin(\mu l) = 0 \Rightarrow \mu l = m\pi, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\mu_m = \frac{m\pi}{l} \Rightarrow \lambda_m = i \frac{m\pi}{l}, m \in \mathbb{N}$$

$J_n(i\mu\rho) = i^n I_n(\mu\rho)$, де $I_n(\mu\rho)$ – модифікована функція Бесселя, яка поводить себе як ch , в той час як f -ція Бесселя поводить себе як cos . (i^n враховуємо в C'_n та D'_n)

$$u^{III}(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\mu_m z) \cdot [C'_n \cos(n\varphi) + D'_n \sin(n\varphi)] \cdot I_n(\mu_m \rho)$$

Підставляючи граничні умови:

$$f_3(\varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\mu_m z) \cdot [C'_n \cos(n\varphi) + D'_n \sin(n\varphi)] \cdot I_n(\mu_m a)$$

$$C'_n = \frac{2}{I_n(\mu_m a) l \pi (1 + \delta_{n,0})} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l dz f_3(\rho, \varphi) \cos(n\varphi) \sin(\mu_m z)$$

$$D'_n = \frac{2}{I_n(\mu_m a) l \pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l dz f_3(\rho, \varphi) \sin(n\varphi) \sin(\mu_m z)$$

Записавши $u(\rho, \varphi, z) = u^I + u^{II} + u^{III}$ маємо розв'язок задачі Діріхле в циліндрі для рівняння Лапласа.

Означення узагальнених функцій. Основні функції та їх властивості. Ядро осереднення. Означення та приклади регулярних та сингулярних узагальнених функцій.

Узагальненою ф-ю f наз. довільний лінійний неперервний функціонал на мн-ні основних ф-й D (тобто усіх фінітних нескінченно диференційовних). Основними ф-ми наз. ф-ї, що мають 2 властивості:

- $\varphi(x) \in C^\infty(R^n)$ (нескінченна к-ть похідних);
- $\varphi(x) = 0$; $x \notin U(0, R)$.

Носій ф-ї $\varphi(x)$: $\text{supp } \varphi(x) = \overline{\{x \in R^n | \varphi(x) \neq 0\}}$, а $\text{supp } \varphi(x) \in U(0, R)$ - ф-я $\varphi(x)$ фінітна. Узагальнена ф-я f - функціонал; $f: D \rightarrow (R \text{ або } C)$, $(f, \varphi) \in (R \text{ або } C)$.

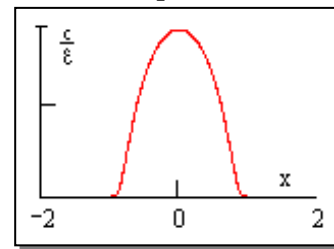
Лінійність: $(f, \sum_k \varphi_k) = \sum_k (f, \varphi_k)$. Неперервність: $\varphi_k^k \rightarrow \varphi \Rightarrow (f, \varphi_k) + (f, \varphi)$, де $f(x)$ -регулярна ф-я; $(f, \varphi) = \int_{R^n} f(x) \varphi(x) d^n x$. f є узагальнена ф-я, $f \in D'$. $R' \subset D'$. – довели (регулярні ф-ї є підмножиною узагальнених). Всі інші ф-ї, що не є регулярними, то вони наз. сингулярними. Якщо $f \in D'$, $f \notin R'$, то $f \in S'$; де D' - мн-на узагальнених ф-й; R' - мн-на регулярних ф-й; S' - сингулярних, $D' = R' \cup S'$. Звичайними або регулярними ф-ми наз. відображення мн-ни X на мн-ну Y таким чином, що $x \in X$ ставиться у відповідність один $y \in Y$; $f: X \rightarrow Y$, $y=f(x)$.

Якщо взяти ф-ю $\omega_h(|x|) = \frac{1}{h^n} \omega_1\left(\frac{|x|}{h}\right)$, де $x \in R^n$, $\omega_1(x) = \begin{cases} c e^{1/(x^2-1)}, & \text{при } |x| < 1 \\ 0, & \text{при } |x| \geq 1 \end{cases}$, а число

$h > 0$ наз. ядром усереднення. Ядро має властивості:

- $\omega_h(|x|) \in C^\infty(R^n)$, $\omega_h(|x|) \geq 0$ в R^n .
- $\omega_h(|x|) \equiv 0$ для $|x| \geq h$.
- $\int_{R^n} \omega_h(|x|) dx = 1$.

Зазначимо, що ці ядра усереднення є основними функціями.



Важливим прикладом регулярних ф-й в теорії узагальнених ф-й є ф-я Хевісайда:

$\theta: (\theta, \varphi) = \int_0^\infty \varphi(x) dx$, тобто $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$. Простішим прикладом сингулярної узагальноної ф-ї є δ - ф-я Дірака: $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in D$, δ - густина точкового заряду одиничної величини.

Диференціювання узагальнених функцій. Приклади.

Нехай $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}'$ – звичайна функція, $f(x) \in C^p$ – неперервна p разів диференційована

$$f: \varphi(x) \rightarrow (f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

$$f^k: \varphi(x) \rightarrow (f^k, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(x)\varphi(x)dx =$$

$$= f^{(k)}(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty-\text{тут функція}=0}^{+\infty-\text{тут функція}=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k-1)}(x)\varphi^{(1)}(x)dx =$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k-1)}(x)\varphi^{(1)}(x)dx = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi^{(k)}(x)dx =$$

$= (-1)^k (f, \varphi^{(k)}) \Rightarrow f^k: (f^k, \varphi) \rightarrow (-1)^k (f, \varphi^{(k)})$ – означення k -ї похідної регулярної функції на мові узагальнених функцій

Озн. $F \in D'$; $f^k: (f^{(k)}, \varphi) := (-1)^k (f, \varphi^{(k)})$ – для всіх сингулярних функцій

визначаємо похідні таким чином. Якщо визначити $\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \dots \partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Для функції багатьох незалежних змінних:

$$\partial^\alpha f: (\partial^\alpha f, \varphi) := (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi)$$

Приклади:

$$\delta': (\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0)$$

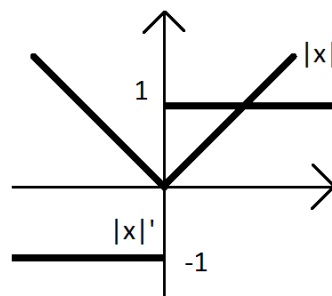
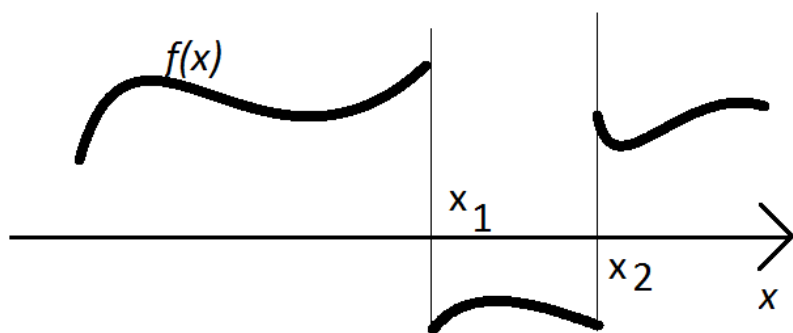
$$\delta^{(k)}: (\delta^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (\delta, \varphi^{(k)}) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$$

$\theta'(x) = \delta(x)$ - формула Хевісайда

$$\theta': (\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = - \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi'(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx =$$

$$= -\varphi(\infty)_{=0 \text{ основної функції}} + \varphi(0) = \varphi(0) = (\delta, \varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\theta', \varphi) = (\delta, \varphi) \forall \varphi \in D. \text{ Отже, } \theta'(x) = \delta(x)$$



$$|x|' = 2\theta(x) - 1, |x|'' = 2\delta(x)$$

Нехай x – незалежна змінна на числовій прямій

$$[f]_{x_k} = f(x_k + 0) - f(x_k - 0)$$

$$f'(x) = \{f'\} - \text{класична похідна в тих точках, де функція диференційовна} \\ + \sum_k [f]_{x_k} \delta(x - x_k)$$

– узагальнення формул 3 і 4

Заміна змінних в узагальнених функціях. Приклади. Множення узагальнених функцій на основну функцію. Приклади.

$$f(x) \in D', \quad a(x) \in D$$

$f(x) \in R', a(x) \in D$ - основна функція

$$(fa, \varphi) = \int_{R^n} f(x)a(x)\varphi(x)d^n x = (f, a\varphi), \varphi(x) - \text{основна функція}$$

$$(fa, \varphi) = (f, a\varphi), f(x) \in S' - \text{сингулярна узагальнена функція}$$

$$fa: (fa, \varphi) := (f, a\varphi)$$

$$D' = R' \cup S'$$

Приклад

$$\delta a: (\delta a, \varphi) = (\delta, \varphi a) = a(0)\varphi(0) = a(0)(\delta, \varphi) = (a(0), \varphi) \Rightarrow \delta a = a(0)\delta$$

$\varphi \in D$ – основні

2. Заміна змінних в узагальнених функціях

$$f(y(x))$$

x – старі координати в R^n ; y – нові координати в R^n

$$y = y(x); \left| \frac{dy}{dx} \right| > 0 - \text{якобіан не нуль}$$

$$f(x) \in R'(\text{рег.}), \varphi \in D(\text{основ.})$$

$$\begin{aligned} (f(y(x)), \varphi(x)) &= \int_{R^n} f(y(x))\varphi(x)d^n x = \int_{R^n} f(y)\varphi(x(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right| d^n y \\ &= \int_{R^n} \frac{f(y)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} \varphi(x(y)) d^n x = \left(\frac{f(y)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|}, \varphi(x(y)) \right) \end{aligned}$$

$$(f(y(x)), \varphi(x)) = \left(\frac{f(y)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|}, \varphi(x(y)) \right)$$

Якщо $f \in S'$ ми цю формулу приймаємо як означення. Дана формула справедлива для всіх узагальнених функцій.

Приклад 1

$$1) y = x + C$$

$$(f(x + C), \varphi(x)) = (f(y), \varphi(y - C))$$

2) $y = Ax$, A – матрица

$$(f(Ax), \varphi(x)) = \left(\frac{f(y)}{|A|}, \varphi(A^{-1}y) \right)$$

3) $y = cx$, $c = \text{const}$

$$(f(cx), \varphi(x)) = (|C^{-n}|f(y), \varphi(C^{-1}y))$$

Приклад 2

$$(\delta(y(x)), \varphi(x)) = \left(\frac{\delta(y)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|}, \varphi(x(y)) \right)$$

$$\delta(y(x)) = \sum_{x_k: y(x_k)=0} \frac{\delta(x - x_k)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_k}}$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{[\delta(x + a) + \delta(x - a)]}{2a}$$

Згортка та перетворення Фур'є узагальнених функцій. Приклади.

Якщо f, g -регулярні узагальнені функції $f(x), g(x) \in R'$, то $(f * g)(x) = \int_{R^n} f(x - y)g(y)dy$

T1(властивості згортки)

$$1)(f * g) = (g * f) \text{ //Комутативність}$$

$$2)\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f * g) = (f * \partial^\alpha g)$$

$$3)((f * g), \varphi) = \int_{R^n} \int_{R^n} f(x)g(y)\varphi(x + y)dxdy = ((f * g), \varphi(x + y))$$

Доведення

$$1)(f * g)(x) = \int_{R^n} f(x - y)g(y)dy = [y' = x - y] = \int_{R^n} f(y')g(x - y')dy'$$

$$3)((f * g), \varphi) = \int_{R^n} \int_{R^n} f(x - y)g(y)\varphi(x)dxdy = \int_{R^n} \int_{R^n} f(x)g(y)\varphi(x + y)dxdy$$

$$\text{Якщо } f(x), g(x) \in S' : ((f * g), \varphi) = ((f * g), \varphi(x + y))$$

Перетворення Фур'є:

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \int_{R^n} \varphi(x)e^{i(x, \xi)}d^n x \text{ //пряме}$$

$$\varphi(x) = \int_{R^n} \tilde{\varphi}(\xi)e^{-i(x, \xi)}d^n \xi \text{ //обернене}$$

$$F^{-1}[\tilde{\varphi}](\xi) = F[\varphi](-x)\frac{1}{(2\pi)^n}$$

T1.

$$1) \partial^\alpha F[\varphi](\xi) = F[(ix)^\alpha \varphi](\xi)$$

$$2) F[\partial^\alpha \varphi](\xi) = (-ix)^\alpha F[\varphi](\xi)$$

$$3) F[\varphi * \Psi](\xi) = F[\varphi](\xi) \cdot F[\Psi](\xi)$$

$$\text{Дов 3) } F[\varphi * \Psi](\xi) = \int_{R^n} (\varphi * \Psi)(x)e^{i(x, \xi)}d^n x = \int_{R^n} \left(\int_{R^n} \varphi(x - y)\Psi(y)dy \right) e^{i(x, \xi)}d^n x =$$

$$= \int_{R^n} du \int_{R^n} dy \varphi(u)\Psi(y)e^{i(u+y, \xi)} = F[\varphi](\xi) \cdot F[\Psi](\xi)$$

T2.

Простір основних функцій S є інваріантом Фур'є перетворення.

$$\sup_{x \rightarrow \infty} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty \Leftrightarrow \sup_{\xi \rightarrow \infty} |\xi^\beta \partial^\alpha F[\varphi](\xi)| < \infty$$

Дов

$$|\xi^\beta \partial^\alpha F[\varphi](\xi)| = |\xi^\beta F[x^\alpha \varphi](\xi)| = |F[\partial^\beta (x^\alpha \varphi)](\xi)| = \left| \int_{R^n} \partial^\beta (x^\alpha \varphi(x)) e^{i(x, \xi)} d^n x \right| \leq \int_{R^n} |\partial^\beta (x^\alpha \varphi(x)) e^{i(x, \xi)}| d^n x < \infty \text{ для будь-яких } \alpha, \beta$$

$$\text{ТЗ. } (F[\varphi], \Psi) = (\varphi, F[\Psi])$$

Дов

$$\begin{aligned} (F[\varphi], \Psi) &= \int F[\varphi] \Psi(\xi) d\xi = \int d\xi \int dx \varphi(x) e^{i(x, \xi)} \Psi(\xi) \\ &= \int \varphi(x) dx \int d\xi e^{i(x, \xi)} \Psi(\xi) = (\varphi, F[\Psi]) \end{aligned}$$

Якщо $f(x), g(x) \in S'$: $F[f]: (F[f], \varphi) := (f, F[\varphi])$, також для них справедливі теореми 1 і 2.

«5 формул»:

- 1) $F[\delta(x - a)] = e^{i(a, \xi)}$
- 2) $F[1] = (2\pi)^n \delta$
- 3) $F[x^\alpha](\xi) = (2\pi)^n (-i \partial)^\alpha \delta(\xi)$
- 4) $F[\partial^\alpha \delta](\xi) = (-i \xi)^\alpha$
- 5) $F[\theta](\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\xi + i\varepsilon}$

Означення δ -функції та її фізична інтерпретація. Диференціювання та заміна змінної в δ -функції. Множення δ -функції на основну функцію. Згортка δ -функції з узагальненими функціями. Перетворення Фур'є від δ -функції.

δ -функція дозволяє записати просторову густину фізичної величини зосередженої в одній точці (наприклад густина точкового заряду одиничної величини)

- Означення: $\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

- Фільтруюча властивість: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$

Нехай f – регулярна узагальнена функція. $f(x) \in R'$, де вона диференційовна.

Якщо f -регулярна узагальнена функція і $f(x) \in R'$, то $(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi)$.

Випадок $n=1$

Якщо f -регулярна узагальнена функція і $f(x) \in R'$, то $(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^\alpha (f, D^\alpha \varphi)$.

Доведення. $(f, \phi) = \int f(x) \phi(x) dx$; $(\partial^\alpha f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x) \right] \varphi(x) = \left[\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}} f(x) \right] \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}} f(x) \right] \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) =$ /*перший доданок рівний 0 тому що $\varphi(x)$ – основна функція*/ $= \int_{-\infty}^{\infty} dx [f(x)] \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \varphi(x) = (-1)^\alpha (f, \partial^\alpha \varphi)$

Випадок $n>1$

Якщо f -регулярна узагальнена функція і $f(x) \in R'$, то $(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi)$.

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_n}} f(x); \alpha = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n); x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$$

Доведення. $(\partial^\alpha f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \left[\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_n}} f(x) \right] \varphi(x) =$
 $= (-1)^{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n f(x) \left[\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \varphi(x) \right] = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi)$

Означення. Кожна узагальнена функція $f \in D'$ є нескінченно диференційовною. $D^\alpha f$: $(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi)$. //то есть для регулярных мы получили формулу и обобщили на сингулярные

- Диференціювання: $(\partial^n f, \varphi) = (-1)^n (f, \partial^n \varphi)$

$$\delta: (\delta, \varphi) = \varphi(0)$$

$$\delta': (\delta', \varphi) = (-1)(\delta, \varphi') = -\varphi'(0) \quad \text{густина диполя одиничної величини}$$

$$\delta'': (\delta'', \varphi) = (-1)^2(\delta, \varphi'') = \varphi''(0) \quad \text{густина квадрупольної одиничної величини}$$

$$\delta^{(k)}: (\delta^{(k)}, \varphi) = (-1)^{(k)}(\delta, \varphi^{(k)}) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$$

- Заміна змінних: $(f(y(x)), \varphi(x)) = (\frac{f(y)}{|\frac{dy}{dx}|}, \varphi(x(y)))$, x -старі, y -нові

$$\delta(y(x)) = \sum_{x_k: y(x_k)=0} \frac{\delta(x-x_k)}{|\frac{dy}{dx}|_{x=x_k}}$$

$$(\delta(cx), \varphi(x)) = (\frac{1}{|c-n|} f(y), \varphi(\frac{y}{c})), \quad y = cx, \quad c = const$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{[\delta(x+a) + \delta(x-a)]}{2a}$$

- Множення на основну функцію: $(fa, \varphi) = (f, a\varphi)$

$$\delta a: (\delta a, \varphi) = (\delta, a\varphi) = a(0)\varphi(0) = a(0)(\delta, \varphi) = (a(0)\delta, \varphi) \Rightarrow \delta a = a(0) \delta$$

- Згортка: $(f * g)(x) = \int_{R^n} f(x-y)g(y)dy$

Властивості:

Комутативність: $f * g = g * f$

- Диференціювання: $\partial^a(f * g) = (\partial^a f * g) = (f * \partial^a g)$

$$(f * g, \varphi) = \int_{R^n} f(x)g(y)\varphi(x+y)dx dy = (f(x)g(x), \varphi(x+y))$$

$$f * \delta: (f(x)\delta(y), \varphi(x+y)) = |(\delta, \varphi) = \varphi(0)| = (f(x), \varphi(x)) \Rightarrow f * \delta = f$$

- Перетворення Фур'є: $(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi])$

$$F[\delta](\xi) = 1$$

$$F[\delta(x-a)](\xi) = F[\delta_a](\xi) = e^{i(a,\xi)}$$

**Фундаментальний розв'язок лінійного диференціального рівняння.
Теорема про існування та єдиність розв'язку лінійного
диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами.**

Розглянемо лінійний диференціальний оператор: $L(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha \partial^\alpha$, де C_α -сталі, $\alpha=1..n$.

Розглянемо рівняння $L(\partial)u(x) = f(x)$.

Узагальненим розв'язком вищенаведеного ЛДР назовемо ф-ю $u(x) \in D'$, яка

задовольняє це рівняння в загальному сенсі, тобто для $\forall$

$$\Phi(x) \in D: (L(\partial)u, \Phi) = (f, \Phi).$$

Серед усіх р-ків є фундаментальний, або функція впливу ε .

Def: Фундаментальним розв'язком $\varepsilon(x)$ лінійного диф. оператора $L()$ називається функція, що задов. рівнянню:

$$L(\partial)\varepsilon = \delta$$

Теорема: Нехай $f \in D'$, причому $\varepsilon * f \in D'$, тоді рівняння $L(\partial)u(x) = f(x)$ має розв'язок $u(x) = \varepsilon * f(x)$ і цей розв'язок єдиний для всіх функцій f , для яких існує згортка.

Доведення:

1. Перевіримо існування:

$$(L(\partial)u, \Phi) = (L(\partial)\varepsilon * f, \Phi) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha (\partial^\alpha (\varepsilon * f), \Phi) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha (\partial^\alpha (\varepsilon) * f, \Phi) = (L\varepsilon * f, \Phi) = (\delta * f, \Phi) = (f, \Phi)$$

2. Єдиність – доводимо від супротивного. Нехай існують 2 різні функції, що

$$\text{задовольняють даному рівнянню: } u_1: L(\partial)u_1 = f \quad (1) \quad \text{та} \quad u_2: L(\partial)u_2 = f \quad (2)$$

$$\text{Розглянемо функцію } \omega = u_1 - u_2. \text{ Віднімемо (1)-(2): } L(\partial)u_1 - L(\partial)u_2 = L\omega = 0 \quad (3)$$

Маємо:

$$\omega = \omega * \delta = \omega * (L(\partial)\varepsilon) = L(\partial)(\omega * \varepsilon) = (L(\partial)\omega) * \varepsilon = |\text{div}(3)| = 0 \quad (4)$$

Отже $u_1 = u_2$. Теорему доведено. ■

Теорема: (без дов.) Для будь-якого лінійного оператора $L(\partial)$ існує фундаментальний розв'язок $\varepsilon \in D'$.

Фундаментальний розв'язок лінійного диференціального рівняння із звичайними похідними. Розв'язок задачі Коші для лінійного диференціального рівняння за допомогою фундаментального розв'язку.

Звичайний лінійний диф. оператор:

$$L(D) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{d^k}{dt^k} = |a_0 = 1| = \frac{d^n}{dt^n} + \frac{a_1 d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n$$

Теорема: для оператора $L(D)$ фундаментальний розв'язок:

$$\varepsilon(t) = \theta(t)z(t), \text{ де}$$

$$L(z(t))=0; \quad z(0)=0; \quad z'(0)=0; \quad \dots; \quad z^{(n-2)}(0)=0; \quad z^{(n-1)}(0)=1$$

Нехай $\varepsilon(t) = \theta(t)z(t)$. Розглянемо її першу похідну:

$$\varepsilon'(t) = (\theta(t)z(t))' = \theta'(t)z(t) + \theta(t)z'(t) = \delta(t)z(t) + \theta(t)z'(t) = \delta(t)z(0) + \theta(t)z'(t) = \theta(t)z'(t)$$

Таким чином:

$$\varepsilon'(t) = \theta(t)z'(t)$$

.....

$$\varepsilon^{(n-1)}(t) = \theta(t)z^{(n-1)}(t)$$

$$\varepsilon^{(n)}(t) = \theta(t)z^{(n)}(t) + \delta(t)z^{(n-1)}(0) = \theta(t)z^{(n)}(t) + \delta(t)$$

Беремо суму цих значень:

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} \varepsilon^{(k)}(t) = \theta(t) \sum_{k=0}^n a_{n-k} z^{(k)}(t) + \delta(t)$$

Подіємо оператором L на функцію ε :

$$L\varepsilon(t) = \delta(t) + \theta(t)Lz(t) = \delta(t)$$

Отже, ε - фундаментальний розв'язок оператора L

Задача Коші:

$$\frac{dU}{dt} + aU = f(t), t > 0$$

$$U(0) = U_0$$

Доповнимо функцію на від'ємну піввісь $\tilde{U}(t) = \theta(t)U(t) \quad -\infty < t < \infty$

$$\frac{d}{dt}\tilde{U}(t) = \frac{d\theta}{dt}u(t) + \theta(t)\frac{dU}{dt} = \theta(t)\frac{dU}{dt} + \delta(t)U(0) = \theta(t)\frac{dU}{dt} + \delta(t)U_0$$

$$\left(\frac{d}{dt} + a\right)\tilde{U}(t) = \theta(t)\frac{dU}{dt} + \delta(t)U_0 + a \cdot \theta(t) \cdot U(t) = \theta(t)\left(\frac{dU}{dt} + aU\right) + \delta(t)U_0 = \theta(t) \cdot f(t) + \delta(t) \cdot U_0 \equiv F(t)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + a\right)\tilde{U}(t) = F(t) \quad -\infty < t < \infty$$

$$F(t) = \theta(t) \cdot f(t) + U_0 \delta(t)$$

Тоді:

$$U(t) = \varepsilon * F(t) = \int \varepsilon(t-s)F(s)ds,$$

якщо f – регулярна узагальнена функція.

Приклади:

$$1) \quad L = \frac{d}{dt} + a \quad \rightarrow \quad \varepsilon(t) = \theta(t)e^{-at}$$

$$2) \quad L = \frac{d^2}{dt^2} + a^2 \quad \rightarrow \quad \varepsilon(t) = \theta(t) \frac{\sin at}{a}$$

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + a^2 U = f(t), t > 0$$

$$U(0) = U_0$$

$$U''(0) = U_1$$

$$\tilde{U}(t) = \theta(t)U(t) \quad -\infty < t < \infty$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a^2\right)\tilde{U}(t) = F(t)$$

$$F(t) = \theta(t) \cdot f(t) + \delta''(t)U_0 + \delta(t)U_1$$

$$U(t) = \int \varepsilon(t-s)F(s)ds$$

**Фундаментальний розв'язок рівняння дифузії в n-вимірному просторі.
Розв'язок задачі Коші та межових задач з однорідними межовими умовами для рівняння дифузії.**

Розглянемо рівняння дифузії у вигляді: $u_t - a^2 \Delta_n u = f(x, t) \quad x \in R^n, t \in R$

Теорема : Фундаментальний розв'язок рівняння дифузії має наступний вигляд

$$\mathcal{E}_n(x, t) = \frac{\Theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}$$

$$\blacktriangleleft \partial_t \mathcal{E}_n - a^2 \Delta_n \mathcal{E}_n = \delta(x, t)$$

$$\delta(x, t) = \delta(x) \delta(t)$$

$$F_x[\partial_t \mathcal{E}_n] - a^2 F_x[\Delta_n \mathcal{E}_n] = F_x[\delta(x, t)]$$

$$\tilde{\mathcal{E}} = F_x[\mathcal{E}_n](k); \quad F_x[\Delta_n \mathcal{E}_n] = -k^2 \tilde{\mathcal{E}}; \quad F_x[\delta(x)] = 1;$$

$$\text{Отже } \partial_t \tilde{\mathcal{E}} - a^2 \Delta_n \tilde{\mathcal{E}} = 1(k) \delta(t)$$

Запишемо фундаментальний розв'язок такого рівняння:

$$\frac{dy}{dt} + ay = \delta(t) \Rightarrow \mathcal{E}(t) = e^{-at} \Theta(t)$$

$$\text{Отже } \tilde{\mathcal{E}} = \Theta(t) e^{-a^2 k^2 t} 1(k)$$

Тепер візьмемо обернене перетворення Фур'є

$$\mathcal{E}_n = F_x^{-1}[\tilde{\mathcal{E}}] = \frac{\Theta(t)}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{-a^2 k^2 t} e^{-i(k, x)} dk$$

$$\mathcal{E}_n(x, t) = \frac{\Theta(t)}{(2\pi)^n} \prod_{i=1}^n \int dk_i e^{-a^2 k_i^2 t - k_i x_i} = \frac{\Theta(t)}{(2\pi)^n} \prod_{i=1}^n \int e^{-a^2 t (k_i + \frac{ik_i}{2a^2 t})^2} dk_i =$$

$$\frac{\Theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} \blacktriangleright$$

Знайдемо узагальнений розв'язок рівняння : $u_t - a^2 \Delta_n u = f(x, t) \quad x \in R^n, t \in R$

$$u = \mathcal{E}_n * f$$

Теорема: Якщо права частина рівняння дифузії регулярна функція, то узагальнений

$$\text{розв'язок має вигляд : } u(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^n} \int_{-\infty}^t \frac{ds}{(t-s)^{3/2}} \int_{R^n} dy e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}} f(y, s)$$

$$\triangleleft u = \mathcal{E}_n * f = \int_R ds \int_{R^n} dy \mathcal{E}_n(x-y, t-s) f(y, s) = \int_R ds \int_{R^n} dy \frac{\Theta(t-s)}{(2a\sqrt{\pi(t-s)})^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}} f(y, s) \triangleright$$

Задача Коші для рівняння дифузії

$$\| u_t - a^2 \Delta_n u = f(x, t), \quad x \in R^n, t \in R_+$$

$$\| u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R^n$$

Нехай $u(x, t)$ це розв'язок задачі Коші. Продовжимо цей розв'язок на від'ємний час:

$$u(x, t) \Rightarrow \tilde{u} = u \Theta(t)$$

$$\partial_t \tilde{u} = \Theta(t) \partial_t u(x, t) + u(x, t) \partial_t \Theta(t) = \Theta(t) \partial_t u(x, t) + u(x, 0) \delta(t)$$

$$\partial_t \tilde{u} = \Theta(t) \partial_t u(x, t) + u_0(x) \delta(t)$$

$$\Delta_n \tilde{u} = \Theta(t) \Delta_n u$$

$$\partial_t \tilde{u} - a^2 \Delta_n \tilde{u} = \Theta(t) \partial_t u(x, t) + u_0(x) \delta(t) - a^2 \Theta(t) \Delta_n u + \Theta(t) [u_t - a^2 \Delta_n u] + u_0(x) \delta(t) = \Theta(t) f(x, t) + u_0(x) \delta(t)$$

Теорема: Розв'язок задачі Коші для рівняння дифузії збігається при $t > 0$ з

узагальненим розв'язком і цей розв'язок має вигляд: $u = \mathcal{E}_n * F$, де

$$F(x, t) = \Theta(t) f(x, t) + u_0(x) \delta(t)$$

Краєва задача для рівняння дифузії

$$\| u_t - a^2 \Delta_n u = f(x, t), \quad x \in R^n, t \in R_+$$

$$\| u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R^n$$

$$\| u(0, t) = 0, \quad t \in R$$

Теорема: Розв'язок такої мішаної краєвої задачі збігається з розв'язком задачі Коші

$$\| \partial_t \tilde{u} - a^2 \Delta_n \tilde{u} = \tilde{f}, \quad x \in R^n, t \in R_+$$

$$\| \tilde{u}(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad x \in R^n$$

де функції

$$\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \in R_+^n \\ -u_0(-x), & x \in R_+^n \end{cases}$$

$$\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}, \mathbf{t}) & , \mathbf{x} \in R_+^n \\ -f(-\mathbf{x}, \mathbf{t}) & , \mathbf{x} \in R_+^n \end{cases}$$

Розв'язок задачі Коші для рівняння дифузії в d -вимірному просторі (формула Пуассона):

$$u_t - a^2 \Delta^{(d)} u = f(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

$$u(x, t) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} dy \mathcal{E}_d(x - y, t - s) f(y, s) + \int_{\mathbb{R}^d} dy \mathcal{E}_d(x - y, t) u_0(y)$$

Метод спуска. Приклади.

Нехай маємо n -вимірну задачу.

$L_n = L_n(\partial_x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$. Розглянемо простір $n + 1$ і введемо змінну $y = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x, x_{n+1}) \in R^{n+1}$. Тоді $L_{n+1}(\partial_y) = L_n(\partial_x) + \sum_{\alpha} L_{\alpha}(\partial_x) \partial_{x_{n+1}}^{\alpha}$.

Наведемо приклад цього оператора:

$$\square_{n+1} = \square_n - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} \quad \text{або} \quad \square_{n+1} = \partial_t^2 - a^2 \Delta_{n+1}.$$

$L_{n+1} \varepsilon_{n+1}(y) = \delta(y)$. Розпишемо цей вираз детальніше:

$$L_n(\partial_x) \varepsilon_{n+1}(y) + \sum_{\alpha} L_{\alpha}(\partial_x) \partial_{x_{n+1}}^{\alpha} \varepsilon_{n+1}(y) = \partial(x) \partial(x_{n+1})$$

Проінтегруємо цей вираз $\int_{-\infty}^{\infty} dx_{n+1}$:

$$L_n(\partial_x) \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{n+1}(y) dx_{n+1} + \sum_{\alpha} L_{\alpha}(\partial_x) \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n+1} \partial_{x_{n+1}}^{\alpha} \varepsilon_{n+1}(y) = \partial(x)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} dx_{n+1} \partial_{x_{n+1}}^{\alpha} \varepsilon_{n+1}(y) = 0$ (бо після підстановки маємо ∞ , а треба фінітний розв'язок).

Остаточно отримаємо формулу:

$$\varepsilon_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{n+1}(y) dy : \quad L_n \varepsilon_n(x) = \delta(x).$$

Метод спуска використовується для знаходження фундаментального розв'язку хвильового рівняння вимірності n ($\varepsilon_n(x)$), коли ми знаємо фундаментальний розв'язок більшої вимірності $n+1$ (ε_{n+1}).

Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в 1-вимірному просторі. Розв'язок задачі Коші.

$$\varepsilon_1(x_1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_2(x_1, x_2, t) dx_2 = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta\left(at - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)}{\sqrt{at - x_1^2 - x_2^2}} dx_2 =$$

$$\left| \begin{array}{l} dt > \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \Rightarrow -\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2} < x_2 < \sqrt{a^2 t^2 - x_1^2} \\ a^2 t^2 - x_1^2 > x_2^2 \end{array} \right| = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \int_{-\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2}}^{\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2}} \frac{dx_2 \theta(at - |x_1|)}{\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}} =$$

$$\left| \sqrt{a^2 t^2 - x_1^2} = c \right| = \frac{\theta(t) \theta(at - |x_1|)}{2\pi a} \int_{-c}^c \frac{dx_2}{\sqrt{c^2 - x_2^2}} = |x_2 = C \sin \varphi| = \frac{\theta(t) \theta(at - |x_1|)}{2\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{C \cos \varphi \cdot d\varphi}{C \cos \varphi} \Rightarrow$$

$\varepsilon_1(x, t) = \frac{\theta(t) \theta(at - |x|)}{2\pi a} \rightarrow$ поле зарядженої площини, тому немає залежності від координати. Теж присутня дифузія хвиль.

Задача Коші.

Необхідно розв'язати:

$$\left\{ \begin{array}{l} \square_n U(x, t) = f(x, t); x \in \square^n, t > 0 \\ U(x, 0) = U_0(x) \\ U_t(x, 0) = U_1(x) \end{array} \right. \quad \square_n = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_n \right)$$

$$U(x, t) = (\varepsilon_n * f)(x, t)$$

Доповнимо функцію, що є розв'язком, від'ємним часом

$\tilde{U}(x, t) = \theta(t) U(x, t)$ Знаходимо похідні:

$\partial_t \tilde{U} = \delta(t) U(x, t) + \theta(t) \partial_t U(x, t)$. Друга похідна:

$$\partial_t^2 \tilde{U} = \delta'(t) U_0(x) + \delta(t) \partial_t U(x, t) + \theta(t) \partial_t^2 U(x, t)$$

$$\square_n \tilde{U}(x, t) = \partial_t^2 \tilde{U} - a^2 \Delta_n \tilde{U} = \delta'(t) U_0(x) + \delta(t) U_1(x) + \theta(t) \square_n U(x, t) \Rightarrow$$

$$\square_n \tilde{U}(x, t) = \delta'(t) U_0(x) + \delta(t) U_1(x) + \theta(t) f(x, t) \equiv F(x, t)$$

$$\square_n \tilde{U}(x, t) = F(x, t) \Rightarrow U(x, t) = \varepsilon_n * F = \varepsilon_n * (\theta(t) f(x, t) + \delta'(t) U_0(x) + \delta(t) U_1(x)) =$$

$$\int_0^t ds \int_{\square^n} dy \varepsilon_n(x - y, t - s) f(y, s) + \int_{\square^n} dy \varepsilon_n(x - y, t) U_1(y) + \int_{\square^n} dy \varepsilon_n'(x - y, t) U_0(y)$$

$\varepsilon_1 \rightarrow \text{формула_Д' Аламбера}$

При підстановці: $\varepsilon_2 \rightarrow \text{формула_Пуассона}$

$\varepsilon_3 \rightarrow \text{формула_Кірхгофа}$

Конкретизуємо для $n=1$: (формула Д' Аламбера)

$$U(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} dy \cdot f(y, s) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} dy \cdot U_1(y) + \frac{1}{2} [U_0(x+at) + U_0(x-at)]$$

Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в 2-вимірному просторі. Розв'язок задачі Коші.

Хвильове рівняння має вигляд: $\square_n U(x, t) = f(x, t)$, де $\square_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_n$

Фундаментальний розв'язок – це розв'язок рівняння: $\square_n \varepsilon(x, t) = \delta(x, t)$

Для $n = 2$ – фундаментальний розв'язок 2х-вимірного хвильового рівняння має вигляд (метод спуску):

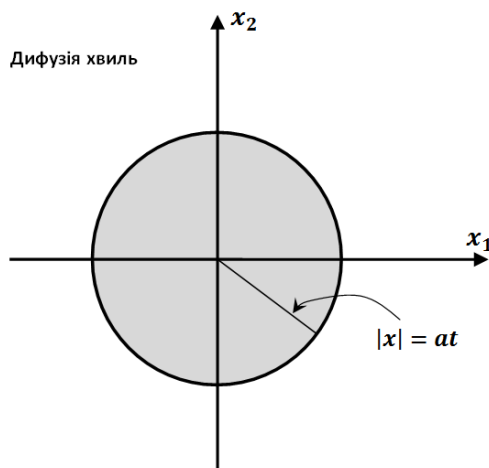
$$\varepsilon_2(x, t) = \varepsilon_2(x_1, x_2, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_3(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 = \frac{\theta(t)}{4\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta\left(at - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} dx_3 =$$

$$= \sum_k \frac{\theta(t)}{4\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_3}{|x|} \frac{\delta(x_3 - x_3^k)}{\left|\frac{dy}{dx_3}\right|_{x_3^k}}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{\textbackslash\textbackslash} \text{пояснення: тут позначимо } y(x_3) = at - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ x_3^k - \text{такі точки, в яких } y(x_3) \text{ рівна нулю:} \\ y(x_3^k) = 0 \Rightarrow x_3^k = \pm \sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2} \\ \frac{dy}{dx_3} = \frac{x_3}{|x|} \Rightarrow \left|\frac{dy}{dx_3}\right|_{x_3^k} = \frac{|x_3^k|}{|dt|}; \quad a^2 t^2 > x_1^2 + x_2^2 \quad \text{\textbackslash\textbackslash} \end{array} \right\} =$$

$$= \sum_{x_k} \frac{\theta(t)}{4\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_3}{|x|_{x_k}} \frac{\delta(x_3 - x_3^k)}{\frac{|x_3^k|}{|x|_{x_k}}} \theta\left(at - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \frac{\theta\left(at - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)}{\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_2(x, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \frac{\theta\left(at - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)}{\sqrt{a^2 t^2 - (x_1^2 + x_2^2)}}} \text{ або } \boxed{\varepsilon_2(x, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \frac{\theta(at - |x|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}}$$



Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в 3-вимірному просторі. Розв'язок задачі Коші. Збудження хвиль точковим джерелом.

Загальний вигляд хвильового рівняння: $\square_n u(x, t) = f(x, t)$, $\square_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_n$.

Фундаментальний розв'язок – це розв'язок рівняння: $\square \varepsilon_n = \delta(x, t)$

$F_x | \partial_t^2 \varepsilon_n(x, t) - a^2 \Delta_n \varepsilon_n(x, t) = \delta(x, t)$ – діємо перетворенням Фур'є

$$F_x[\varepsilon_n(x, t)] = \tilde{\varepsilon}_n(k, t)$$

$$\partial_t^2 \tilde{\varepsilon}_n(k, t) - a^2 |k|^2 \tilde{\varepsilon}_n(k, t) = 1(k) \delta(t)$$

$$\tilde{\varepsilon}_n(k, t) = \theta(k) z(t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z'' + a^2 |k|^2 z = 0 \\ z(0) = 0 \\ z'(0) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} z(t) = A \sin a|k|t + B \cos a|k|t \\ z(0) = B = 0 \\ z'(0) = Aa|k| = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{a|k|} \end{array}$$

$$z(t) = \frac{\sin a|k|t}{a|k|}; \quad \tilde{\varepsilon}_n(k, t) = \frac{\theta(t) \sin a|k|t}{a|k|}$$

$$\varepsilon_n(x, t) = F_x^{-1}[\tilde{\varepsilon}_n(k, t)] = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}_n} \frac{\sin a|k|t}{a|k|} e^{-i(k,x)} dk$$

– фундаментальний розв'язок хвильового рівняння для n-вимірного випадку.

Для трьохвимірного випадку: $n = 3$:

$dk = |k|^2 d|k| \sin \theta d\theta d\varphi$, $(k, x) = |k||x| \cos \theta$. Отже,

$$\varepsilon_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{|k|^2 d|k|}{a|k|} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{-i|k||x| \cos \theta} \sin \theta d\theta \sin a|k|t$$

$$I = \int_0^\pi e^{-i|k||x| \cos \theta} \sin \theta d\theta = |\cos \theta = y|$$

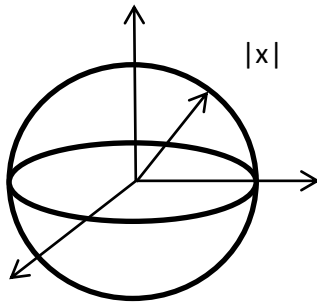
$$= \int_{-1}^1 e^{-i|k||x|y} dy = \frac{e^{-i|k||x|} - e^{i|k||x|}}{-i|k||x|} = 2 \frac{\sin |k||x|}{|k||x|}$$

$$\varepsilon_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty \frac{|k|^2 d|k|}{a|k|} 2 \frac{\sin |k||x|}{|k||x|} \sin a|k|t = \frac{\theta(t)}{4\pi^2 |x| a} \int_0^\infty [\cos |k|(at - |x|) - \cos |k|(at + |x|)] d|k| = \left| \int_0^\infty \cos kx dk = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} dk = \pi \delta(x) \right| = \frac{\theta(t)}{4\pi^2 |x| a} \pi [\delta(at - |x|) - \delta(at + |x|)],$$

оскільки останній доданок в дужках не нуль тільки в точці $t = -\frac{|x|}{a}$, а в нас $t > 0$, тому фундаментальний розв'язок має вигляд:

$$\varepsilon_3(x, t) = \frac{\theta(t) \delta(at - |x|)}{4\pi |x| a}$$

Даний розв'язок характеризує поширення сферичних хвиль, що збуджуються точковим джерелом, що й впливає з виразу для фундаментального розв'язку $\varepsilon_3(x, t)$ множником $\delta(at - |x|)$, що означає, що в даним момент часу хвиля перебуває в точці $|x| = at$. Ще це називають принципом Гюгенса-Френеля.



Задача Коші:
$$\begin{cases} \square_n U(x, t) = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \\ U(x, 0) = U_0(x) \\ U_t(x, 0) = U_1(x) \end{cases}$$

$$U(x, t) = (\varepsilon_n * f)(x, t)$$

Доповнимо функцію, що є розв'язком, від'ємним часом $\tilde{U}(x, t) = \theta(t)U(x, t)$ Знаходимо

похідні: $\partial_t \tilde{U} = \delta(t)U(x, t) + \theta(t)\partial_t U(x, t)$. Друга похідна:

$$\partial_t^2 \tilde{U} = \delta'(t)U_0(x) + \delta(t)\partial_t U(x, t) + \theta(t)\partial_t^2 U(x, t)$$

$$\square_n \tilde{U}(x, t) = \partial_t^2 \tilde{U} - a^2 \Delta_n \tilde{U} = \delta'(t)U_0(x) + \delta(t)U_1(x) + \theta(t)\square_n U(x, t) \Rightarrow$$

$$\square_n \tilde{U}(x, t) = \delta'(t)U_0(x) + \delta(t)U_1(x) + \theta(t)f(x, t) \equiv F(x, t)$$

$$\square_n \tilde{U}(x, t) = F(x, t) \Rightarrow U(x, t) = \varepsilon_n * F = \varepsilon_n * (\theta(t)f(x, t) + \delta'(t)U_0(x) + \delta(t)U_1(x)) =$$

$$\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy \varepsilon_n(x-y, t-s) f(y, s) + \int_{\mathbb{R}^n} dy \varepsilon_n(x-y, t) U_1(y) + \int_{\mathbb{R}^n} dy \varepsilon_n'(x-y, t) U_0(y)$$

$\varepsilon_1 \rightarrow$ формула _Д'Аламбера

При підстановці: $\varepsilon_2 \rightarrow$ формула _Пуассона Конкретизуємо для $n = 3$:

$\varepsilon_3 \rightarrow$ формула _Кірхгофа

$$U(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-y| \leq at} \frac{f(y, t - \frac{|x-y|}{a})}{|x-y|} d^3 y + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|x-y|=at} U_1(x) dS_y + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{|x-y| \leq at} U_0(x) dS_y \right)$$

dS_y – диференціал поверхні сфери

Доведення: Беремо перетворення Фур'є:

$$F_x \quad \left| \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_n \right) U(x, t) = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \right.$$

$$\left| \quad U(x, 0) = U_0(x), \quad U_t(x, 0) = U_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \right.$$

$$\left| \quad \begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dt^2} + a^2 |\xi|^2 \right) F_x[U](\xi, t) = F_x[f](\xi, t) \\ & F_x[U(x, 0)] = F_x[U_0](\xi), \quad F_x[U_t(x, 0)] = F_x[U_1](\xi) \end{aligned} \right.$$

Функція Гріна задачі Діріхле. Функція Гріна для n -вимірного півпросторі та n -вимірної кулі.

$$\Delta_n u(x) = f(x), x \in D \subset \mathbb{R}^n$$

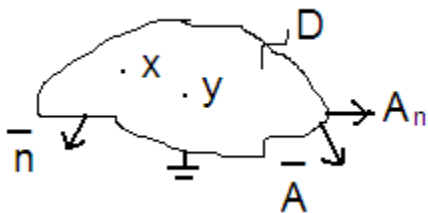
$$u(x)|_{\partial D} = g(x)$$

Означення. Функція Гріна $G_D(x, y)$, де D – область n – вимірного простору, $x \in D, y \in \bar{D}$, яка має дві властивості:

$$1) \Delta G_D(x, y) = \delta(x - y), x, y \in D$$

$$2) G_D(x, y) = 0, y \in \partial D \text{ (межа області } D); D \text{ - екіпотенціальна поверхня.}$$

Функція Гріна G_D в області D це потенціал, що створюється в точці y , точковим зарядом одиничної величини що розміщений у точці x і екіпотенціальною поверхнею ∂D .



Теорема 1. (Гріна) Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$, де $x \in \mathbb{R}^n$, а самі функції неперервні і $u(x), v(x) \in C^2(D)$, то справедлива наступна рівність:

$$\int_D u(y) \Delta v(y) - v(y) \Delta u(y) d^n y = \int_{\partial D} u(y) \frac{\partial}{\partial n} v(y) - v(y) \frac{\partial}{\partial n} u(y) ds \quad \left(\frac{\partial}{\partial n} - \text{нормаль, } ds - \text{диференціал площі поверхні} \right)$$

Доведення

$$\int_D \operatorname{div} \bar{A} dy = \int_{\partial D} A_n(y) ds \quad - \text{формула Гауса-Остроградського}$$

$$\Delta u(y) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u(y), \text{ підставити } \Rightarrow \text{Доведено.}$$

Задача Діріхле в $\mathbb{R}^n$ для рівняння Пуассона.

Задача Діріхле полягає в тому, що треба знайти $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Delta u(x) = f(x), x \in D \subset \mathbb{R}^n, f(x) - \text{густина зарядів}$$

$$u(x)|_{x \in \partial D} = g(x), g(x) - \text{потенціал на поверхні області}$$

Теорема 2. Розв'язок задачі Діріхле:

$$u(x) = \int_D G_D(x, y) f(y) dy + \int_{\partial D} g(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G_D(x, y) ds$$

Доведення.

Візьмемо функцію u як $u(x)$ і функцію Гріна як $v(y)$ з теореми 1 :

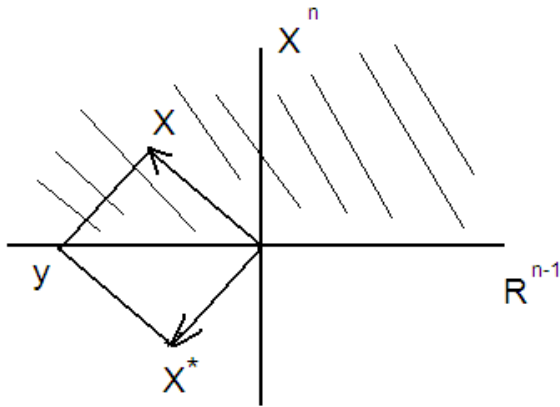
$$\int_D u(y) \Delta G(x, y) - G(x, y) \Delta u(y) d^n y = \int_{\partial D} (u(y) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y) - G(x, y) \frac{\partial}{\partial n} u(y)) ds$$

$$\int_D (u(y) \delta(x - y) - G(x, y) f(y)) dy = \int_{\partial D} (g(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y)) ds \quad \text{Доведено.}$$

Функція Гріна півпростору $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) | x_n > 0\}$

$$x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

$$x^* = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) - \text{дзеркальне відображення } x$$



$$G_{R_+^n}(x, y) = \varepsilon(|x - y|) - \varepsilon(|x^* - y|)$$

Доведення

$$1) \Delta G_{R_+^n}(x, y) = \Delta \varepsilon(|x - y|) - \Delta \varepsilon(|x^* - y|) = \delta(x - y) - \delta(x^* - y) = \delta(x - y) \quad x, y \in R_+^n$$

$$2) G_{R_+^n}(x, y)|_{y \in \partial D} = \varepsilon(|x - y|) - \varepsilon(|x^* - y|)|_{y \in \partial D} = 0$$

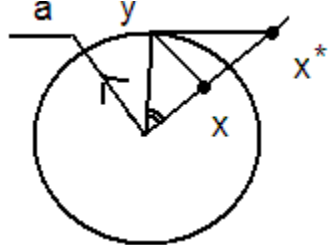
$$\frac{\partial}{\partial n} G_{R_+^n}(x, y) = \frac{2x_n}{\sigma_n |x - y|^n}$$

Доведено

Функція Гріна для кулі: $D = \{x \mid |x| < a\}$

$$|x||x^*| = a^2$$

$$x^* = \frac{a^2}{|x|^2} x$$



$$G_D(x, y) = \varepsilon(|x - y|) - \varepsilon\left(\frac{|x|}{a} |x^* - y|\right)$$

Доведення

$$1) \Delta G_D(x, y) = \delta(x - y), \quad x, y \in D$$

$$2) G_D(x, y)|_{y \in \partial D} = 0$$

$\Delta Oxy \sim \Delta O x^* y \Rightarrow$ з подібності випливає:

$$|x - y| = \frac{|x|}{a} |x^* - y| \text{ коли } |y| = a$$

Доведено

$$\frac{\partial}{\partial n} G_D(x, y) = \frac{a^2 - |x|^2}{\sigma_n a |x - y|^n}$$

n-вимірні сферичні координати та фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в n-вимірному просторі.

Рівняння Лапласа і Пуассона

Розглядаємо рівняння $\Delta_n U(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. У n-вимірному просторі x-вектор $x = \{x_1, \dots, x_n\}$; $dx^n = dx_1 \dots dx_n$. Використовуємо сферичні координати, позначимо $|x| = r$. Тоді $dx^n = r^{n-1} dr d\sigma_n$, де σ_n – площа одиничної сфери S^n в n-вимірному просторі

Теорема. $\sigma_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ – площа одиничної сфери

Обчислимо двома методами:

$$\begin{aligned} 1) \quad I &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n = \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-x_k^2} dx_k \right]^n = \pi^{\frac{n}{2}} = (\pi^{\frac{1}{2}})^n \\ 2) \quad I &= \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr * \sigma_n = |r^2 = t| = \frac{\sigma_n}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n-2}{2}} dt = \frac{\sigma_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

Теорема про фундаментальний розв'язок оператора Лапласа

$$\varepsilon_2(r) = \frac{1}{2\pi} \ln r \quad \varepsilon_n(r) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n r^{n-2}}$$

Ці формули є узагальненням закону кулона

$$\Delta_n = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{n, \text{кутова частина}}$$

Розглянемо рівняння: $\varepsilon_n(x) = \varepsilon_n(|x|) = \varepsilon_n(r)$ Тоді, коли оператор кутовий Лапласа діє на функцію, то цей оператор зникає, адже немає залежності від кута

$$\Delta_n \varepsilon_n(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial r} \right) = \delta(r) \quad 0 \leq r < \infty$$

У випадку $0 < r < \infty$ маємо

$$\frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial r} \right) = 0, \quad 0 < r < \infty \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial r} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial r} = \frac{A}{r^{n-1}} \quad (A - \text{константа})$$

$$A = \frac{1}{\sigma_n} \quad ; \quad \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial r} = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \quad - \text{проінтегрувати} \rightarrow \text{маємо умови теореми.}$$

$\varphi(0) = (\delta, \varphi)$ – рівність в n-вимірному просторі, замість δ – функції підставимо оператор Лапласа

$$\begin{aligned} (\Delta \varepsilon_n, \varphi) &= -(\nabla \varepsilon, \nabla \varphi) = -\left(\frac{\partial \varepsilon_n}{\partial r}, \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\sigma_n \int_0^\infty \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} r^{n-1} dr = -\sigma_n \int_0^\infty \frac{A}{r^{n-1}} \frac{\partial \varphi}{\partial r} r^{n-1} dr = \\ &= -\sigma_n A \int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr = -\sigma_n A [\varphi(\infty) - \varphi(0)] = \sigma_n A \varphi(0) = \varphi(0) \Rightarrow A = \frac{1}{\sigma_n} \end{aligned}$$

Оглавление

Основні поняття та означення теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Принцип суперпозиції для лінійних диференціальних рівнянь та приклади його застосування.	1
Метод відокремлення змінних для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними та приклади його застосування.	3
Розв'язок рівняння дифузії на відрізку методом відокремлення змінних. Приклад.	5
Розв'язок хвильового рівняння на відрізку методом відокремлення змінних. Приклад.	7
Розв'язок рівняння Лапласа та Пуассона в прямокутнику методом відокремлення змінних. Приклад.	8
Розв'язок рівняння Лапласа та Пуассона в крузі та кільці методом відокремлення змінних. Приклад.	9
Гармонічні поліноми та їх властивості. Означення сферичних функцій.	11
Ортогональність та повнота системи сферичних функцій на сфері одиничного радіусу. Диференціальне рівняння сферичних функцій.	14
Представлення фундаментального розв'язку рівняння Лапласа у вигляді ряду по сферичних функціях у випадку, коли особлива точка фундаментального розв'язку і центр координат не співпадають.	17
Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в сферичних координатах.	19
Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі методом відокремлення змінних. Приклад.	20
Означення та класифікація циліндричних функцій. Співвідношення між циліндричними функціями Беселя, Неймана та Ханкеля. Інтегральні зображення циліндричних функцій.	21
Циліндричні функції у випадку, коли незалежна змінна прямує до нуля або до нескінченності. Метод перевалу. Приклади.	24
Диференціальне рівняння для циліндричних функцій. Ортогональність і повнота системи циліндричних функцій на відрізку. Ряди Фур'є-Бесселя.	27
Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в циліндричних координатах.	29
Графіки стандартних циліндричних функцій.	30
Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в циліндрі методом відокремлення змінних. Приклад.	31

Означення узагальнених функцій. Основні функції та їх властивості. Ядро осереднення. Означення та приклади регулярних та сингулярних узагальнених функцій.....	34
Диференціювання узагальнених функцій. Приклади.	35
Заміна змінних в узагальнених функціях. Приклади. Множення узагальнених функцій на основну функцію. Приклади.....	37
Згортка та перетворення Фур'є узагальнених функцій. Приклади.....	39
Означення δ -функції та її фізична інтерпретація. Диференціювання та заміна змінної в δ -функції. Множення δ -функції на основну функцію. Згортка δ -функції з узагальненими функціями. Перетворення Фур'є від δ -функції.	41
Фундаментальний розв'язок лінійного диференціального рівняння. Теорема про існування та єдиність розв'язку лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами.	43
Фундаментальний розв'язок лінійного диференціального рівняння із звичайними похідними. Розв'язок задачі Коші для лінійного диференціального рівняння за допомогою фундаментального розв'язку... ..	44
Фундаментальний розв'язок рівняння дифузії в n -вимірному просторі. Розв'язок задачі Коші та межових задач з однорідними межовими умовами для рівняння дифузії.....	46
Метод спуска. Приклади.	49
Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в 1-вимірному просторі. Розв'язок задачі Коші.	50
Задача Коші.	50
Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в 2-вимірному просторі. Розв'язок задачі Коші.	52
Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в 3-вимірному просторі. Розв'язок задачі Коші. Збудження хвиль точковим джерелом.....	53
Задача Коші: $\square_n Ux, t = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \quad Ux, 0 = U_0(x) \quad Utx, 0 = U_1(x)$	54
Функція Гріна задачі Діріхле. Функція Гріна для n -вимірного півпросторі та n -вимірні кулі.....	55
n -вимірні сферичні координати та фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в n -вимірному просторі.	57